INCIDENCIA DE LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS DE CÓMPUTOS EN LA COMPRENSIÓN DEL CÁLCULO.

BOLAÑO, Juan José; SCAGNETTI, Olga
Facultad Regional Santa Fe – Universidad Tecnológica Nacional
Lavaisse 610 (CP: 3000), Santa Fe, Santa Fe, Argentina.
juanjoseb@outlook.com

Palabras claves: Enseñanza para la Comprensión (EpC) – Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC) - Comprensión

RESUMEN
Este trabajo se enmarca en el proyecto ""El Uso de Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC), Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la FRSF" en el que se pretende analizar si la inclusión de la herramienta computacional mejoran los desempeños de comprensión de los estudiantes en determinados tópicos. El análisis se hace bajo el marco teórico "Enseñanza para la Comprensión" en el que comprender es sinónimo de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe.
Se reporta una experiencia donde se usa el software Mathematica en la resolución de un problema incluido en el Trabajo de Laboratorio. Se pone énfasis en la comprensión de enunciados, los pasos seguidos para resolver las consignas utilizando el programa, en el cambio de estrategia de resolución y en las justificaciones dadas al momento de la defensa oral de los mismos.

INTRODUCCIÓN
La enseñanza de matemática en las carreras de ingeniería cobra importancia al momento de formar adecuadamente el pensamiento analítico, el rigor demostrativo, el sentido de exactitud, el de la aproximación aceptable, la objetividad numérica y tantas otras cualidades que debe poseer un buen ingeniero.
Lo más importante de la matemática no es solo la simple aritmética del día a día, sino el desarrollo del razonamiento, ya que gran parte de esta ciencia se basa en lógica deductiva; los alumnos deben ser capaces de plantear problemas en pasos lógicos y resolver cada uno de éstos usando técnicas y teoremas que muchas veces son el resultado de años de aprendizaje.
En cátedras como Análisis Matemático II, algunos conceptos se notan separados de la realidad, provocando una notable distancia entre el esquema tradicional de trabajo donde se utilizan gráficos estándar de funciones lineales o cuadráticas, generalmente mirados desde el octante xyz positivo, trazados sobre una región cerrada y acotada, lo que desdibuja la realidad, haciendo que el aprendizaje resulte parcial y poco motivador para su aplicación en problemas que lo requieran debido a su complejidad.
La experiencia muestra que si el alumno adquiere desempeños flexibles en la manipulación de funciones de dos variables, ese difícil proceso de abstracción hace accesible el cálculo en más variables, objetivo final de las materias como es Análisis Matemático II en las carreras de ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe.
Es por lo expuesto, que despierta el interés en la investigación de, como el título del presente trabajo expresa, la "Incidencia de los Sistemas Algebraicos de Cómputos en la comprensión del Cálculo", trabajado bajo el marco teórico de la "Enseñanza para la Comprensión" (EpC). De esta manera se estudia el uso del software *Mathematica* en las diferentes asignaturas de cálculo, en este caso Análisis Matemático II, observando cómo la incorporación de las nuevas tecnologías pueden ayudar a superar los

inconvenientes en la comprensión de los distintos tópicos. La incorporación de la computadora en la enseñanza de la matemática puede resultar beneficiosa y muy útil, pero también puede ser improductiva y peligrosa si su inserción no es adecuada.

MARCO TEÓRICO

El proyecto es trabajado bajo el marco teórico *Enseñanza para la Comprensión* (EpC) [1,2] desarrollado por Gardner, Perkins, Perrone y colaboradores, integrantes de la Escuela de Graduados en Educación de Harvard. En general, los docentes afirman que el objetivo de las prácticas es que el alumno comprenda lo estudiado teóricamente, pero el significado de "comprensión" puede variar en los distintos modelos de enseñanza. Muchos refrendan que un alumno comprendió si puede reproducir y justificar el tópico además de resolver una variada gama de ejercicios rutinarios. Los libros de textos y los exámenes tipos dan cuenta de ello ya que se acreditan contenidos reproduciendo definiciones, teoremas y habilidades de rutina. Para la EpC, esto es un antecedente de la comprensión, pero no consecuente. En este marco, comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe.

La comprensión se manifiesta a través de *desempeños de comprensión*, variedad de actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben de nuevas maneras. Estos desempeños observables serán los que permitirán finalmente categorizar ("medir") la comprensión.

La EpC no es sólo un marco teórico de investigación, sino que es una metodología de enseñanza, que se basa en las siguientes cuatro preguntas

- ¿Qué tópicos se deben comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Las respuestas a cada una de las preguntas dan orígenes a los pilares de la EpC:

- Tópicos generativos
- Metas de comprensión
- Desempeños de comprensión
- Evaluación diagnóstica continua

Los tópicos generativos se definen como conceptos o ideas alrededor de los cuales se desea desarrollar la comprensión. No todo concepto puede ser generativo ya que debe tener la cualidad de ser central para un dominio o disciplina, ser accesible e interesante para los alumnos y ser interesante para el docente. En el caso de Análisis Matemático II, los problemas de optimización es uno de estos tópicos, hilo conductor de la asignatura por contar con todas las cualidades necesarias.

OBJETIVO

El cálculo en varias variables no cuenta, como si lo hace el de una variable, con la posibilidad de recurrir a gráficos que faciliten la interpretación. Los conceptos aparecen poco visualizables, muchas veces imprecisos, abstractos. En general, los alumnos reducen su proceso de enseñanza a una serie de algoritmos, no siempre de justificación comprendida que limita de manera perjudicial el potencial instrumental y formativo que la materia tiene en las carreras de ingeniería.

En este marco, los alumnos que colaboran con las actividades del proyecto "El Uso de Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC), Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la FRSF" asisten a los docentes en el desarrollo de los laboratorios de la asignatura donde se usa el software *Mathematica* para visualizar curvas y superficies que luego permiten resolver problemas de aplicaciones. Además, asisten a los alumnos en el desarrollo de sus

trabajos prácticos. De esta manera, ayudan a detectar debilidades y fortalezas del uso del programa para comprender los conceptos desarrollados.
El interés del grupo recae, entre otras cosas, en explorar y comparar las posibles fortalezas y debilidades de los aprendizajes, la autonomía en la gestión del conocimiento y el logro de desempeños de comprensión de los alumnos cuando se utiliza materiales didácticos tradicionales y cuando se incorpora el empleo de la computadora, SAC y recursos informáticos de comunicación.

METODOLOGÍA

El uso de SAC es una exigencia curricular en la UTN, dado que se considera que la enseñanza de la matemática debe ser "motivada y no axiomática" y que "los trabajos prácticos de todas las materias del área matemática serán realizados en computadora, utilizando el mencionado software especializado que permite el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación" (Resolución 64/94 del Consejo Superior de la UTN).
Desde hace ya varios años, uno de los instrumentos de evaluación de la cátedra son los Trabajos de Laboratorios (TL), ejercicios y problemas que se resuelven en grupos de tres estudiantes fuera de los horarios de cursado usando el software *Mathematica*. La aprobación de uno de los dos TL es condición necesaria para obtener la regularidad en la asignatura. Por lo general, los ejercicios contienen ítems donde los procedimientos tipos llevan a representaciones geométricas valiosas y cálculos numéricos tediosos, aunque incluyen ítems que no pueden ser resueltos con los algoritmos tradicionales. Una vez resuelto, los estudiantes suben su producción al campus virtual y luego de corregidos, se defienden en una instancia pública. En análisis del problema, los pasos seguidos para su resolución y las justificaciones que los estudiantes hacen en las defensas de los mismos permiten caracterizar la comprensión de un tópico.
El enunciado de un problema del TL de grupo de eléctrica del año 2012 se transcribe a continuación (los parámetros tales como $nmax$ y $Nmed$ están ligado a los números de legajo de los alumnos y el objetivo de la inclusión es para impedir la "duplicación" de los TL por parte de distintos grupos).
Ejercicio: Leyes de la Fotometría: La iluminación producida por una fuente puntual sobre una superficie es directamente proporcional a la intensidad I del foco e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d. Cuando la iluminación sobre una superficie no es normal a ésta, sino que forma un cierto ángulo α respecto de la dirección perpendicular, la iluminación producida es igual al producto de la iluminación normal por el coseno del ángulo α que forman la dirección de incidencia y la normal a la superficie.

a) Graficar las curvas de nivel de iluminación que recibe un punto del plano horizontal ubicado a una altura h=1 de una habitación cuadrada de 9 unidades de longitud, que si está trazada en [0,9]x[0,9] tiene tres focos de intensidad, y ,ubicados en P_1*=(2 ;* $nmax$ *;3),*P_2*=(4,5 ;* $nmin$ *;3) y* P_3*=(7 ;* $nmed$ *;3)*

b) Si se desea ubicar una pieza en el punto más iluminado del piso de habitación que esté sobre la circunferencia de radio 9 trazada en ella ¿Dónde se debería colocar?

c) Dar el rango de iluminación en la habitación en el plano horizontal de altura h=1.

d) Estimar la ubicación de los puntos de máxima y mínima iluminación en los planos horizontales de altura 1 y 2.

RESULTADOS

Las soluciones encontradas por uno de los grupos fueron N: 61, 54 y 26 y los n: 1, 4 y 6.
La primera de las consignas es cerrada, trazar el mapa de contorno, y persigue el objetivo que el estudiante controle si la función iluminación encontrada es viable (ya que los focos y sus intensidades fueron observados en el mapa de contorno).

La segunda consigna refiere a determinar el máximo condicionado, el que no puede determinarse usando el algoritmo de Lagrange debido a la imposibilidad de resolver el sistema de ecuaciones resultante ni aún usando las potencialidades simbólicas y numéricas del SAC. Es aquí donde niveles de desempeños de comprensión elevados son requeridos. Los estudiantes deben usar lo que saben, pero de manera diferente. Los estudiantes plantearon el problema de varias maneras pero sólo dos grupos respondieron la consigna, entre los que se destaca un grupo que resolvió parcialmente el problema a través de una sentencia programada "If" que guardaba el valor más alto de la iluminación (pero no las coordenadas del punto) siguiendo la trayectoria y otro que analiza el problema desde dos gráficos, uno que remeda la justificación teórica del método de Lagrange del texto Stewart (usado en la cátedra) y otro un poco más detallado.

Las últimas dos consignas, problema de extremos absolutos en una región cerrada o acotada, tuvo conflictos similares a la anterior. Los conceptos teóricos llevan a la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones, situación que no logrará con las funciones previstas por el programa. Sin embargo**,** el uso de las representaciones gráficas y/o funciones numéricas permitirían a los futuros ingenieros responder a las consignas. Nuevamente, los dos grupos anteriores resolvieron el problema, uno apelando a la programación de funciones que calculando sistemáticamente el valor de la iluminación guardaba el máximo/mínimo, el otro utilizando sucesivos gráficos, refinando los rangos de interés

Resumiendo, de los 10 grupos del curso, solo dos utilizaron el software para desarrollar y exhibir verdaderos desempeños de comprensión, los restantes resolvieron aquellas consignas donde usaban *Mathematica* como un asistente para resolver los cálculos, pero no para apelar a nuevos métodos de resolución.

En general**,** en la defensa pública se escuchaban expresiones como "no lo resuelve". Al momento de presentarse los dos grupos mencionados algunos pares opinaron que estos habían sido "ingeniosos", "no se me hubiera ocurrido" y otros, más preocupantes tales como "yo creía que tenía que ser con Análisis Matemático II".

CONCLUSIONES

Como se reseñó en esta experiencia sólo el 20% de los grupos cambiaron su estrategia de resolución de problemas con la inclusión de SAC. Para algunos de los grupos, la inclusión del programa no resultó de ayuda, sino por el contrario**,** un obstáculo.

Es preciso que los docentes aseguren que los alumnos pasen una amplia parte del tiempo utilizando y expandiendo sus mentes y no recibiendo pasivamente lo que otros han creado. Los desempeños de comprensión hacen posible diseñar estrategias para que los alumnos saquen el mayor provecho educativo de las nuevas tecnologías. La observación del TL de los jóvenes permite guiar su trabajo y explorar con ellos potencialidades, a la vez que generamos un ambiente motivador y productivo.

Se debe aspirar a lograr verdaderos desempeños de comprensión, que les permitan pensar avanzando más allá de lo que se les dice, confrontando sus ideas y actitudes desde una perspectiva más crítica, combinando y contrastando esas ideas de formas hasta el momento inexploradas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Blythe, T y colaboradores. et al (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires. Editorial Paidós

[2] Stone Wiske, M. (2005). *Enseñanza para la comprensión con Nuevas Tecnologías.* Buenos Aires. Editorial Paidós.