

# IMPLEMENTACIÓN DE UN ELEMENTO FINITO CON ROTACION NODAL LIBRE

D. Decicco, A. Romero y A. Valdéz.

*Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba.  
Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA.  
Córdoba Capital. Córdoba. Argentina.*

[deciccodario@hotmail.com](mailto:deciccodario@hotmail.com), [daleakd@hotmail.com](mailto:daleakd@hotmail.com), [andres10valdez@hotmail.com](mailto:andres10valdez@hotmail.com)

Tutor: Dr. Ing. S.M. Giusti

*Departamento de Ingeniería Civil. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. CONICET  
Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA.  
Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. [sgjusti@civil.frc.utn.edu.ar](mailto:sgjusti@civil.frc.utn.edu.ar)*

## Introducción.

Los elementos finitos de elasticidad bidimensional utilizados habitualmente para simular problemas planos o de membranas, no tienen como grado de libertad la rotación de sus nodos; sino que esta rotación es calculada a partir de los desplazamientos relativos entre los mismos. Esto implica que la rotación de los nodos se encuentra penalizada y es constante dentro del elemento, es decir, es una consecuencia de los desplazamientos nodales relativos y no un grado de libertad.

La descripción de un determinado fenómeno físico, dentro de lo que se considera mecánica del continuo, se realiza mediante diferentes tipos de modelos matemáticos. Los modelos matemáticos usuales en sistemas elásticos lineales consideran las rotaciones de los nodos como funciones directas de las rotaciones que puede realizar el baricentro del elemento.

Este modelo matemático y el utilizado usualmente representan o describen la solución al mismo problema, la única diferencia es la mejora en la representación de la solución del elemento finito. Con el fin de dar respuesta a esta situación, se presenta la implementación computacional, dentro del paquete de elementos finitos de MatLab, de un elemento de elasticidad bidimensional con la rotación de sus nodos como un grado de libertad independiente, y su aplicación en la resolución de problemas de optimización topológica.

El propósito logrado es el de poder describir de un modo más eficiente, la deformación que sufre un sólido elástico plano solicitado a un estado de carga con una determinada característica geométrica, incorporando como grado de libertad la rotación de cada punto del dominio. Esto conlleva a un mejor entendimiento de los fenómenos físicos que gobiernan los problemas de ingeniería.

Como una consecuencia del objetivo antes descrito, se demuestra los beneficios que presenta la mejor descripción del problema si se estuviera implementando un elemento finito que considera la rotación como un grado de libertad.

## Desarrollo.

El elemento a implementar fue desarrollado a mediados de la década de 1980, por el profesor D. J. Allman, agregándole al campo de desplazamiento usual la rotación de los nodos como grado de libertad. Si se desea profundizar el marco teórico, en general, puede consultarse en [1, 2, 3].

El elemento triangular desarrollado, utilizado para resolver casos de elasticidad plana, con rotación libre en los nodos, presenta las siguientes variables:

$$u_i = u(x, y) \quad v_i = v(x, y) \quad \omega_i = \omega(x, y),$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son las componentes cartesianas del desplazamiento y  $\omega_i$  son los valores de la rotación del vértice.

En la figura 1(a), podemos observar un esquema del elemento triangular con los desplazamientos en el nodo  $i$  y la rotación libre del mismo como un grado de libertad. Pudiendo hacer extensivo este concepto a cada nodo del elemento. Efectuamos un apropiado cambio de base que nos facilitará el cálculo de los desplazamientos; la figura 1(b), muestra el mismo elemento pero en coordenadas triangulares.

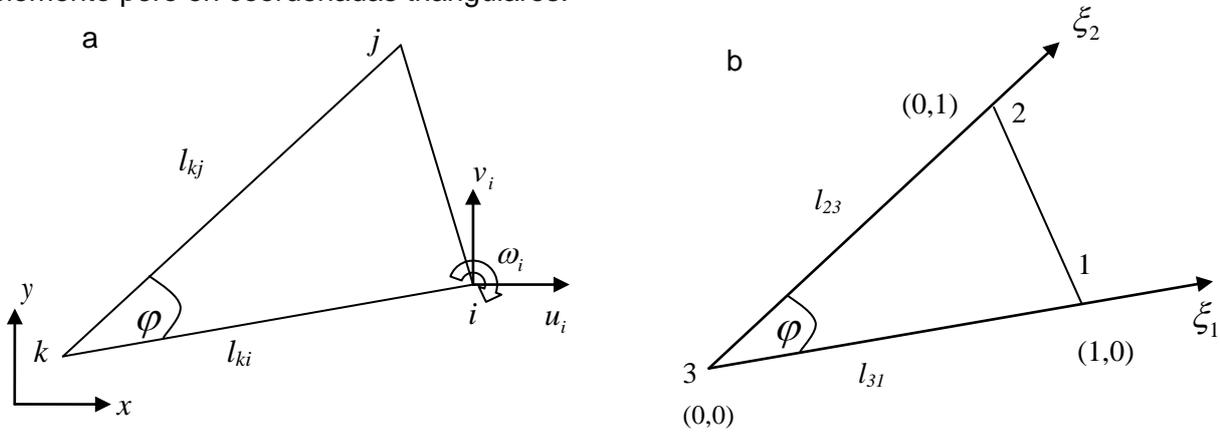


Figura 1. (a) Representación del elemento. (b) Sistema de coordenadas triangulares.

Podemos visualizar la contribución propia de la rotación, incluida como grado de libertad de los nodos, en las componentes de nuestro campo de desplazamientos. Si observamos los primeros tres términos de cada componente estamos frente a la formulación clásica de desplazamiento del método de elementos finitos, aplicada a un elemento triangular de deformación constante. En base a las publicaciones realizadas por Allman tenemos que la solución aproximada es escrita en término de las funciones de forma clásicas como:

$$u = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{12} \cos \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} l_{23} \cos \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) \xi_3 \xi_2 + \frac{1}{2} l_{13} \cos \gamma_{13} (\omega_1 - \omega_3) \xi_1 \xi_3$$

$$v = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{12} \text{sen} \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} l_{23} \text{sen} \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) \xi_3 \xi_2 + \frac{1}{2} l_{13} \text{sen} \gamma_{13} (\omega_1 - \omega_3) \xi_1 \xi_3$$

Evaluando las componentes normal y tangencial del desplazamiento ( $u_n, u_t$ ) a lo largo de un lado del elemento de longitud  $l_{12}$ , de la forma;

$$u_n = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 \quad u_t = a_4 + a_5 s,$$

donde la coordenada  $s$  es medida desde el final de un lado y los coeficientes  $a_1, \dots, a_5$  son evaluados en término de los conectores en los dos nodos extremos. Las funciones solución propuestas por Allman cumplen con las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y rotaciones nodales, a saber:

$$u_n|_{s=0} = u_{n1}; \quad u_n|_{s=l_{12}} = u_{n2};$$

$$u_t|_{s=0} = u_{t1}; \quad u_t|_{s=l_{12}} = u_{t2}.$$

Calculados en función de los desplazamientos  $u$  y  $v$  mediante las siguientes expresiones:

$$u_n = u \cos \gamma + v \text{sen} \gamma, \quad u_t = -u \text{sen} \gamma + v \cos \gamma,$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre la normal al entorno y el eje de las  $x$ . La quinta condición de compatibilidad se observa en la siguiente expresión, en la cual  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las rotaciones de los vértices 1 y 2.

$$\left. \frac{\partial u_n}{\partial s} \right|_{s=l_{12}} - \left. \frac{\partial u_n}{\partial s} \right|_{s=0} = \omega_1 - \omega_2$$

Para llevar el problema de coordenadas globales  $(x, y)$  a coordenadas triangulares  $\xi_1; \xi_2; \xi_3$ , facilitando así el cálculo de la matriz elemental de rigidez; hacemos uso de la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A} \begin{pmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & Y_2 - Y_3 & X_3 - X_2 \\ X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & Y_3 - Y_1 & X_1 - X_3 \\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1 & Y_1 - Y_2 & X_2 - X_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

En la ecuación de cambio de base anterior [2], escribimos cada coordenada rectangular  $(x, y)$  en función de la geometría del elemento triangular donde  $(X_i; Y_i)$  son las coordenadas cartesianas de ese elemento y el valor  $A$  es el área del mismo cuya magnitud esta dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix}$$

Para calcular la matriz de rigidez de un elemento partimos de las expresiones de energía de deformación, de nuestro elemento, dada por la Teoría de la Elasticidad.

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot t \cdot dx dy,$$

donde  $\sigma = D \cdot \varepsilon$  y  $\varepsilon = B \cdot C \cdot u$ .

En la integral anterior defino el valor del espesor del elemento a través de  $t = t(x, y)$ , para nuestros casos suponemos un espesor constante dentro del elemento. La presentación de la energía de deformación, en particular para el método de elementos finitos [1,2], está dada por:

$$U = \frac{1}{2} u^T \left[ C^T \iint_A B^T \cdot D \cdot B \cdot t \cdot dx dy \cdot C \right] \cdot u$$

A partir de la ecuación anterior se definió a la expresión entre corchetes como la rigidez del elemento.

$$K_e = C^T \iint_A B^T \cdot D \cdot B \cdot t \cdot dx dy \cdot C$$

En donde las matrices B, D y C son respectivamente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -y & 1 \end{pmatrix} \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & \frac{1}{2} y_1 y_{23} & y_{31} & 0 & \frac{1}{2} y_2 y_{31} & y_{12} & 0 & \frac{1}{2} y_3 y_{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} y_{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} y_{31} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} y_{12} \\ 0 & x_{32} & \frac{1}{2} x_1 x_{23} & 0 & x_{13} & \frac{1}{2} x_2 x_{31} & 0 & x_{21} & \frac{1}{2} x_3 x_{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} x_{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} x_{31} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} x_{12} \\ x_{32} & y_{23} & \frac{1}{2} (x_1 y_{32} + y_1 x_{32}) & x_{13} & y_{31} & \frac{1}{2} (x_2 y_{13} + y_2 x_{13}) & x_{21} & y_{12} & \frac{1}{2} (x_3 y_{21} + y_3 x_{21}) \end{pmatrix}$$

Por cuestiones de notación, hemos designado a  $X_{ij} = X_i - X_j$ . La matriz D es el arreglo propio de elasticidad lineal isotrópica.

Al realizar el producto  $B^T \cdot D \cdot B$ , con el correspondiente cambio de coordenadas, la integral nos queda en función de  $\xi_i$ , la cual es complicada de resolver. Utilizamos entonces la siguiente propiedad para solucionar dicha dificultad

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1; \quad \frac{1}{A} \cdot \iint_A \xi^m \cdot \xi^n \cdot \xi^p dx dy = \frac{2m!n!p!}{(m+n+p+2)!}$$

La implementación del elemento finito propuesto por Allman, consistió en el ensamblaje de la matriz de rigidez propuesta y su inclusión en la función "asema.m" del paquete de Elementos Finitos de MatLab (pdetool). Esta función es la encargada de acoplar las matrices de rigidez y vectores de carga locales de los elementos en su contraparte global.

Ejemplo de aplicación.

Se presenta a continuación un ejemplo de elasticidad lineal isotrópica, acoplando el problema a un optimizador para distribuir del modo más eficiente el material, con restricciones geométricas.

El dominio de análisis consta de un plano de 1m x 1m y de espesor unitario, empotrado en su arista izquierda y libre en las demás, con una carga puntual de 10 N aplicada en el vértice superior derecho en dirección vertical. El material está caracterizado por un módulo de Young de 210 GPa y un coeficiente de Poisson de 0,3.

El algoritmo de optimización está basado en la representación geométrica del dominio a través de curvas de level-set. La dirección de descenso de la función a optimizar está guiada por la derivada topológica [6,7]. Una descripción detallada del algoritmo y su fundamentación matemática puede encontrarse en [4,5]. La ventaja de esta clase de algoritmo es un bajo costo computacional, ya que trabaja con una malla de elementos finitos fija y la función de level-set distribuye el material entre los elementos. Evitando el costo de crear una nueva malla de elementos finitos a cada cambio de topología durante el proceso de optimización.

La malla construida posee 800 elementos con 441 nodos. El mallado del dominio se muestra en la figura 2(b).

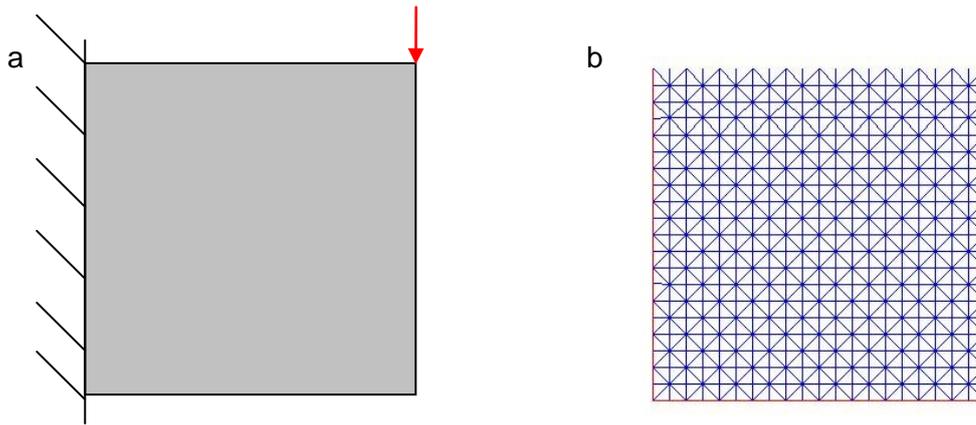


Figura2. (a)Modelización del problema. (b)Mallado inicial.

El estado tensional propio de este ejemplo, en su primera instancia, es el que está a continuación.

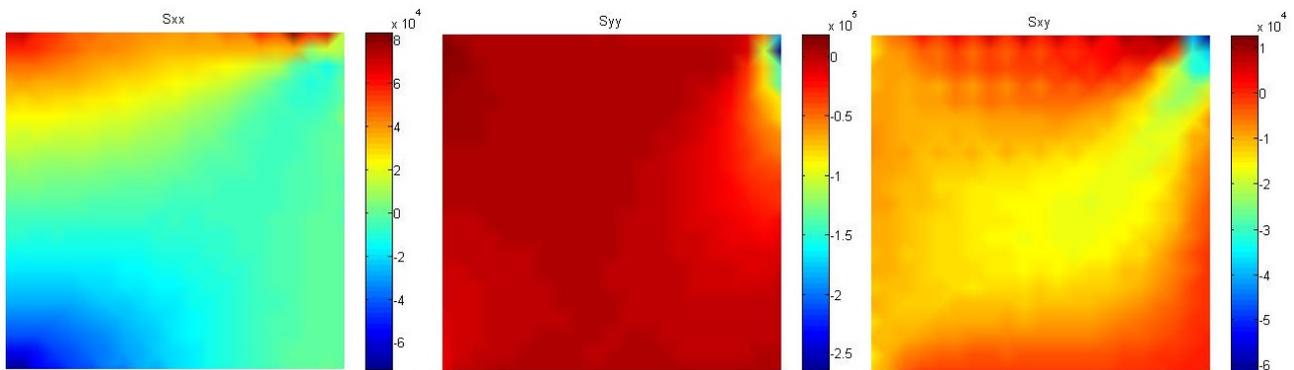


Figura 3. Estado tensional.  $S_{ik}$  Son las componentes del tensor de tensiones.

Al aplicar el algoritmo de optimización, la estructura cuenta con dos grupos de elementos, cada uno de ellos con diferente material, eficientemente distribuidos. El material más débil (que se interpretará como un vacío) utilizado durante la secuencia de optimización posee un módulo de Young mil veces menor que el original y el mismo coeficiente de Poisson.

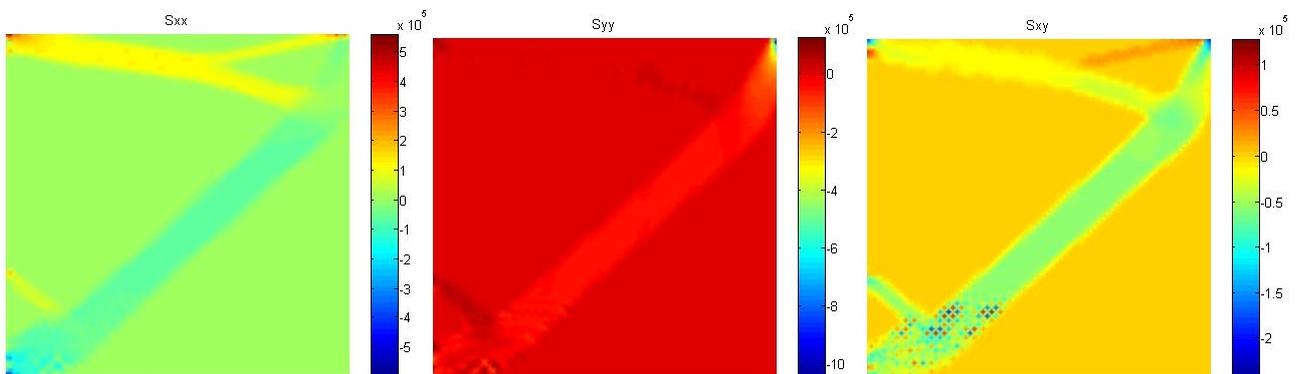


Figura 4. Estado tensional final.

Habiendo ejecutado el algoritmo de optimización, con la nueva matriz de rigidez, propia de nuestra consideración, lo que obtenemos a la iteración número treinta y uno es una reducción del volumen final a un 24,4%, con lo cual hemos redistribuido racionalmente el material que antes

ocupaba un 100%. El resultado final que nos entrega el optimizador, está reflejado en la figura 5(b), donde el negro es el conjunto con material y el blanco el conjunto vacío.

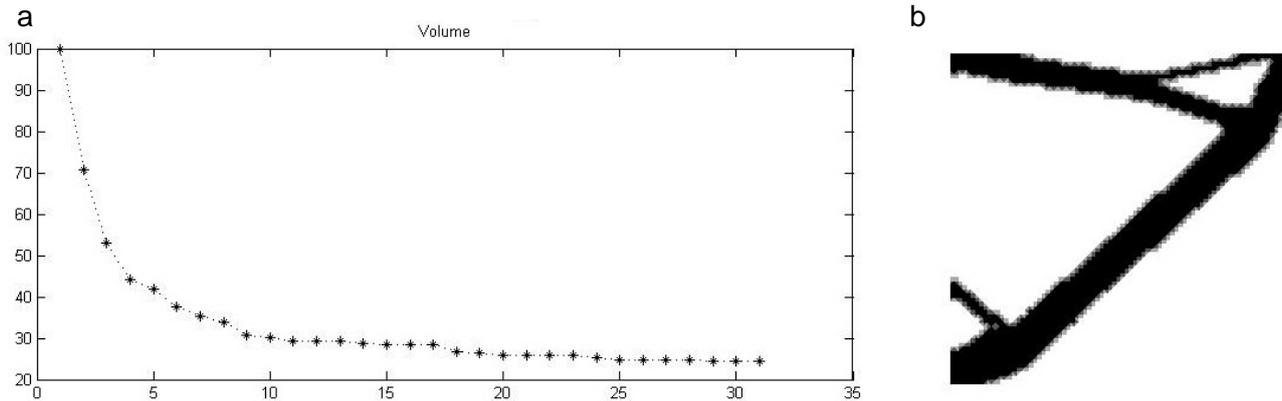


Figura 5. (a)Variación del volumen. (b)Geometría optimizada del cubo.

### Conclusión.

Presentada la ecuación de la matriz de rigidez del elemento, con sus definiciones y las propiedades a utilizar para su cálculo, se logró la implementación computacional del elemento con la rotación como nuevo grado de libertad. Así, luego de implementar este elemento triangular lo que hemos logrado es otorgarle a Matlab otra clase de aproximación a la solución de la ecuación de elasticidad.

En particular para el ejemplo desarrollado podemos ver que las tres componentes del tensor de tensiones se han uniformizado, comparadas con las iniciales. Con ello, se logra una reducción aproximada del 76% del volumen inicial. Esta solución representa la estructura más rígida posible bajo el sistema de carga establecido y la restricción de volumen impuesta.

### Bibliografía.

- [1] Hughes T.J.R. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall. 1987.
- [2] D. J. Allman. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Computer & Structures*, 19:1-2,1984.
- [3] D. J. Allman. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,26:2645-2655, 1988.
- [4] S. Amstutz & H. André. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2): 573-588, 2006.
- [5] S. Amstutz, S. M. Giusti, A. A. Novotny, E. A. de Souza Neto. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6): 733-756, 2010.
- [6] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:803-829, 2003.
- [7] J. Sokolowski & A. Zochowski. On topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37:1251-1272, 1999.