Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte V

Funciones de Bessel

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas
y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina

2006

Funciones de Bessel.

5.1 - Ecuación diferencial de Bessel:

Según se vio en la Tercera Parte que una ecuación diferencial de segundo orden, con coeficientes variables responde a la fórmula general

$$(x - a)^2 . y'' + (x - a) . \alpha (x) . y' + \beta (x) . y = 0 \tag{3.2}$$

La ecuación

$$\boxed{x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0} \quad \textit{Ecuación de Bessel} \tag{5.1}$$

que se conoce como Ecuación Diferencial de Bessel, y en la que ν es un número real no negativo, constituye un caso particular entre las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Comparando entre si las ecuaciones (3.2) y (5.1), surgen a primera vista las siguientes relaciones:

$$a = 0$$

$$\alpha (x) = 1 ,$$

y $$\beta (x) = x^2 - \nu^2$$

Solución de la Ecuación de Bessel:

Cualquier función y (x) que satisfaga la ecuación (5.1) será una solución particular de la Ecuación de Bessel.

Además, si $y_1 (x)$ e $y_2 (x)$ son ambas soluciones de aquella, entonces también lo son $A\, y_1 (x)$ y $B\, y_2 (x)$, donde A y B son dos constantes arbitrarias:

$$x^2 A\, y_1'' (x) + x A\, y_1' (x) + A (x^2 - \nu^2) y_1 (x) = 0$$

$$x^2 B\, y_2'' (x) + x B\, y_2' (x) + B (x^2 - \nu^2) y_2 (x) = 0$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades, obtenemos:

$$x^2 (A y_1'' + B y_2'') + x (A y_1' + B y_2') + (x^2 - \nu^2) (A y_1 + B y_2) = 0 \tag{5.2}$$

Si llamamos:

$$y = A y_1 + B y_2 \tag{5.3}$$

entonces:

$$y' = A y_1' + B y_2'$$

e $$y'' = A y_1'' + B y_2''$$

Lo que demuestra que la (5.3) es también solución de la ecuación de Bessel.

Vamos a tratar ahora de hallar una solución particular de la ecuación, es decir, vamos a definir cómo debe ser la función y (x) para que sea solución de dicha ecuación.

A tal fin, comenzaremos por sustituir en la misma la solución general (3.4), es decir:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{k+\gamma}$$

Por razones de orden práctico, hemos cambiado el nombre del índice m por k. Hecho lo cual, reemplazamos el valor de y (x) en la ecuación de Bessel, con lo que obtenemos la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\gamma)(k+\gamma-1)\, c_k\, x^{k+\gamma} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\gamma)\, c_k\, x^{k+\gamma} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k+\gamma+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k+\gamma} = 0 \qquad (5.4)$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo x, lo que a su vez exige que sean nulos todos los coeficientes que multiplican a cada una de las potencias de x. Esta conclusión nos conduce a encontrar ciertas ecuaciones a partir de las cuales podremos determinar el valor de tales coeficientes.

Empecemos por el caso en que k = 0. El coeficiente de x^{γ} está dado precisamente por la suma de los coeficientes que multiplican a x^{γ} en cada una de las sumatorias, es decir:

$$\boxed{\gamma(\gamma-1)\, c_o + \gamma\, c_o - \nu^2\, c_o = 0}$$

Ecuación Indicial

Esta igualdad se conoce como *Ecuación Indicial*, porque podemos a partir de ella calcular los coeficientes c_k (Ver apartado 3.1).

Para resolver la Ecuación Indicial es necesario que se cumpla que $c_o \neq 0$, pues de lo contrario como puede verse por simple inspección de la ecuación, si $c_o = 0$, nos encontraríamos en un callejón sin salida. Simplificando, hallamos que:

$$\gamma^2 - \nu^2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación algebraica de segundo grado son:

$$\gamma_1 = +\nu \qquad \text{y} \qquad \gamma_2 = -\nu$$

De modo similar, si k = 1, la suma de los coeficientes de $x^{1+\gamma}$, que también debe ser nula, es:

$$(\gamma+1)\gamma\, c_1 + (\gamma+1)\, c_1 - \nu^2\, c_1 = (\gamma^2 + 2\gamma + 1 - \nu^2)\, c_1 = 0$$

Reemplazando en ella la primera de las dos soluciones posibles:

$$\gamma = \gamma_1 = +\nu$$

tenemos:

$$(\nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2)\, c_1 = (2\nu + 1)\, c_1 = 0$$

Como establecimos que ν es un número no negativo, entonces c_1 deberá ser necesariamente nulo.

Nota: Incluso si hubiéramos aceptado la segunda solución:

$$\gamma = \gamma_2 = -\nu$$

habríamos obtenido:

$$(\nu^2 - 2\nu + 1 - \nu^2)\, c_1 = (-2\nu + 1)\, c_1 = 0$$

por lo que c_1 debería ser también igual a cero, salvo en el caso puntual en que ν fuera igual a 0,5[1]. Es decir que para la generalidad de los casos se cumple la condición

$$c_1 = 0$$

Finalmente, para $k = 2, 3, 4, \ldots,$ obtenemos la forma general:

$$(k + \gamma)(k + \gamma - 1)\, c_k + (k + \gamma)\, c_k + c_{k-2} - \nu^2 c_k = 0$$

$$\therefore \qquad (k + \gamma)^2 c_k - (k + \gamma)\, c_k + (k + \gamma)\, c_k - \nu^2 c_k + c_{k-2} = 0$$

Al simplificarla, resulta

$$[(k + \gamma)^2 - \nu^2]\, c_k + c_{k-2} = 0$$

Despejando c_k obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia que permite obtener todos los coeficientes, pares e impares, a partir del conocimiento de los dos primeros:

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k + \gamma)^2 - \nu^2}$$

De aquí, como c_1 es igual a cero se deduce que todos los coeficientes de índice impar son nulos:

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = c_{2s+1} = 0$$

Para determinar los coeficientes de índice par, sabiendo que $\gamma = \nu$, empezaremos por reemplazar este valor en la fórmula de recurrencia:

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k + \nu)^2 - \nu^2} = \frac{-c_{k-2}}{k^2 + 2k\nu + \nu^2 - \nu^2} = \frac{-c_{k-2}}{k(k + 2\nu)}$$

Como k es un número par, podemos hacer:

$$k = 2m, \qquad \text{con } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

con lo cual, las fórmulas anteriores se modifican como sigue:

$$c_{2m} = \frac{-c_{2(m-1)}}{2m(2m + 2\nu)} = \frac{-c_{2(m-1)}}{4m(m + \nu)}$$

[1] Por ahora dejamos de lado el caso particular en el que $\nu = 0{,}5$, que veremos oportunamente.

Esta fórmula nos permitirá calcular todos los coeficientes de índice 2m, a partir del conocimiento de c_o, pero como éste no está definido, se acostumbra adoptar para el mismo el siguiente valor, que conduce a aplicaciones interesantes de las funciones de Bessel:

$$c_o = \frac{1}{2^{\nu}\ \nu!} = \frac{1}{2^{\nu}\ \Gamma(\nu+1)}$$

A partir de aquí, apelando a la fórmula de recurrencia, podemos obtener los demás coeficientes:

Para c_2 (En cuyo caso, m = 1),

$$c_2 = \frac{-\ c_o}{4\,(1+\nu)} = \frac{-\ 1}{2^2\,(\nu+1)\ 2^{\nu}\ \Gamma(\nu+1)}$$

Si recordamos que

$$\Gamma(n+1) = n\ .\ \Gamma(n)$$

la expresión del coeficiente c_2 se puede reformular como sigue:

$$c_2 = \frac{-\ 1}{2^{2+\nu}\ (\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)} = \frac{-\ 1}{2^{2+\nu}\ \Gamma(\nu+2)}$$

De modo similar, para c_4 (m = 2) será:

$$c_4 = \frac{-\ c_2}{8\,(2+\nu)} = \frac{1}{8\ .\ 2^{2+\nu}\,(\nu+2)\,\Gamma(\nu+2)} = \frac{1}{2^{4+\nu}\ 2!\ \Gamma(\nu+3)}$$

Por reiteración, esta última fórmula conduce a la ecuación siguiente, que permite calcular en forma directa cualquier coeficiente de índice par:

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\ m!\ \Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.5}$$

5.2 - Funciones de Bessel:

Aplicando para los coeficientes de la ecuación (3.6) el valor dado por la ecuación anterior, y recordando que hemos elegido $\gamma = \nu$, se obtiene una solución particular de la Ecuación de Bessel, que se conoce como Función de Bessel de primera clase y que se designa como $J_{\nu}(x)$:

$$\boxed{J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ x^{2m}}{2^{2m+\nu}\ m!\ \Gamma(\nu+m+1)}} \tag{5.6}$$

Función de Bessel de 1ª Clase

El exponente 2m en el numerador tiene en cuenta que los coeficientes de índice impar son nulos.

Si en lugar de $\gamma = \nu$ hubiéramos tomado la segunda solución de la ecuación indicial, es decir $\gamma = -\nu$, habríamos llegado a la solución:

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \, x^{2m}}{2^{2m-\nu} \, m! \, \Gamma(m-\nu+1)}$$

Si ν no es un entero, cualquier combinación lineal de estas dos últimas ecuaciones es una *Solución General* de la ecuación diferencial de Bessel. Por ejemplo:

$$y(x) = A \, J_{\nu}(x) + B \, J_{-\nu}(x)$$

donde A y B son números complejos arbitrarios. En efecto, esta ecuación no es otra que la (5.3), en la que

$$y_1 = J_{\nu}(x)$$

e

$$y_2 = J_{-\nu}(x)$$

Por el contrario, si ν es un entero, $\nu = n$, se demuestra que $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes entre sí, y la solución anterior no es válida. En efecto, las ecuaciones son ahora:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \, x^{2m}}{2^{2m+n} \, m! \, (n+m)!} \tag{5.7}$$

y

$$J_{-n}(x) = x^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \, x^{2m}}{2^{2m-n} \, m! \, (m-n)!} \tag{5.8}$$

En la segunda de ellas, los índices comienzan a partir de m = n, porque, como el factorial de un número entero negativo es infinito, todos los términos para los que m es menor que n son nulos, al estar divididos por una cantidad infinita.

Ahora demostraremos la dependencia lineal entre ambas soluciones. Empezaremos llamando:

$$m = n + s$$

Por lo tanto,

$$m - n = s,$$

y

$$2m - n = 2n + 2s - n = 2s + n$$

Reemplazando en la (5.8) resulta:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \, x^{2m-n}}{2^{2m-n} \, m! \, (m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \, x^{2s+n}}{2^{2s+n} \, (n+s)! \, s!}$$

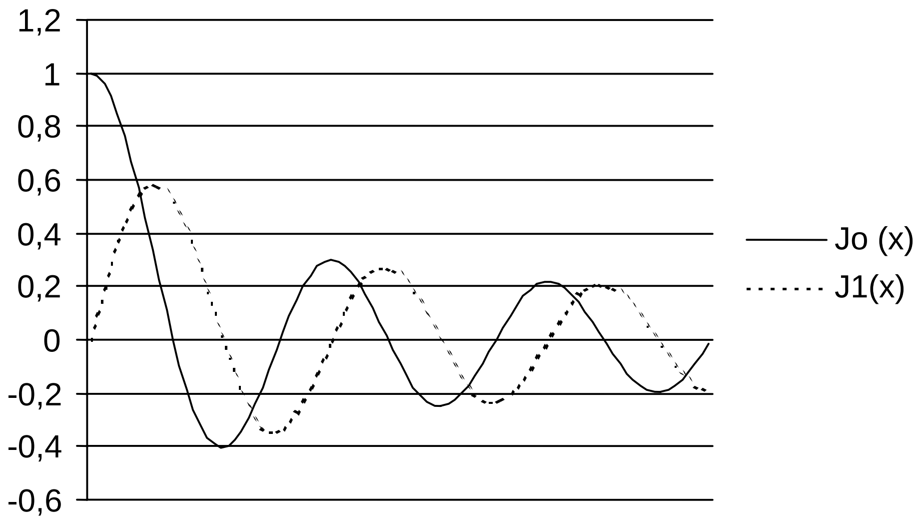
Es decir

$$J_{-n}(x) = (-1)^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s+n} s! (n+s)!}$$

Si cambiamos el nombre del índice s por m, esta ecuación es igual a $(-1)^n \cdot J_n(x)$. Queda por consiguiente probado que $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes entre sí.

Como conclusión, cuando ν es un número entero, para encontrar una solución general de la ecuación diferencial se hace necesario recurrir a otro tipo de funciones Bessel: Las llamadas funciones de Bessel de segunda clase que estudiaremos en el parágrafo 5.9.

A continuación representamos las funciones $J_o(x)$ y $J_1(x)$:



5.3 - Expresion integral de las funciones de Bessel:

Hasta ahora hemos expresado las funciones de Bessel a través de desarrollos en series de potencias de x. Sin embargo, como veremos en este apartado, dichas funciones fueron introducidas históricamente como integrales que involucran relaciones entre funciones trigonometricas de x, de la forma siguiente:

Sea una función f(z) analítica en una corona con centro en el orígen de coordenadas, a la que desarrollaremos en serie alrededor del punto $z_0 = (0, 0)$.

Empezaremos por recordar el desarrollo en serie de Laurent de una función f (z), en $z_o = (0,0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

Los coeficientes a_n y b_n están dados por las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}} \, dz$$

Para nuestro caso vamos a llamar:

$$a_n = \gamma_n \qquad y \qquad b_n = \gamma_{-n}$$

Así, la serie de Laurent que define la función f (z), puede escribirse:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-n} \, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \, z^n$$

Donde $\gamma_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz$

Demostraremos seguidamente que si la función f (z) es

$$f(\zeta) = e^{\frac{x}{2}(\zeta - \zeta^{-1})}$$

siendo $\zeta = e^{i\theta}$

es un complejo de módulo unitario, entonces γ_n es igual a la función de Bessel de primera clase y orden n. Antes de continuar, trataremos de averigüar qué forma adopta γ_n en este caso. Derivando ζ respecto de θ,

$\therefore$ $d\zeta = i\, e^{i\theta} \, d\theta$

y reemplazando en la integral, obtenemos:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\frac{x(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2}}}{e^{in\theta} \,.\, e^{i\theta}} \, i\, e^{i\theta} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix \operatorname{sen}\theta}}{e^{in\theta}} \, d\theta$$

y finalmente:

$$\boxed{\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)} \, d\theta} \qquad (5.9)$$

Función de Bessel de primera clase y orden “n”

En la Sección 5.4 trataremos de relacionar esta forma con la definida en el parágrafo 5.2. De hecho, demostraremos que

$$\gamma_n = J_n(x)$$

Por otro lado, como

$$e^{i(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)} = \cos(x \operatorname{sen}\theta - n\theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)$$

la función de Bessel se puede escribir también de la manera siguiente:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta \qquad (5.10)$$

En la última integral el integrando es el seno de una diferencia. Por tanto, dicha integral puede desdoblarse así:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta)\cos n\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

Llamemos:

$$f_1(\theta) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta) \qquad y \qquad f_2(\theta) = \cos(x \operatorname{sen}\theta)$$

Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} f_2(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta \qquad (5.11)$$

Tratándose de un seno, $f_1(\theta)$ es una función impar, lo mismo que $f_2(\theta)$, por tratarse de un coseno, es una función par.

Si comparamos la fórmula de los coeficientes a_n en el desarrollo de una función en serie de Fourier,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)\cos nt\, dt$$

con la primer integral del segundo miembro de la (5.11), vemos que, si a_n es el coeficiente del desarrollo de Fourier de $f_1(\theta)$, la misma es igual a $a_n\,\pi$:

$$\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta\, d\theta = a_n\,\pi$$

Pero siendo $f_1(\theta)$ impar, los coeficientes a_n, y por tanto, la integral, deberán ser todos nulos. De modo similar, como $f_2(\theta)$ es una función par, la segunda integral en la (5.10) es también nula:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen} n\theta \; d\theta = \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \operatorname{sen} n\theta \; d\theta = b_n \, \pi = 0$$

En resumen, la (5.11) queda reducida a la igualdad:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta - n\theta) \, d\theta$$

Expresión Integral de la Función de Bessel de 1ª Clase

Siendo el integrando una función coseno, de período 2π, puede ponerse, alternativamente:

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta - n\theta) \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta - n\theta) \, d\theta \qquad (5.12)$$

5.4 - Demostración de la equivalencia entre las formas polinómica e integral:

A continuación, a partir de los desarrollos en serie de las funciones elementales, probaremos que las formas (5.6) ó (5.7) de las funciones de Bessel y la expresión (5.9) son equivalentes.

La forma exponencial el número complejo ζ, de módulo unitario, es:

$$\zeta = 1 \,.\, e^{i\theta}$$

de lo cual se deducen las relaciones siguientes:

$$\zeta = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad \zeta^{-1} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta,$$

$$\zeta^{n} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \quad \text{y} \quad \zeta^{-n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \qquad (5.13)$$

Restando entre sí las dos primeras se advierte que:

$$\zeta - \zeta^{-1} = 2\, i \operatorname{sen}\theta$$

de donde:

$$e^{i \operatorname{sen}\theta} = e^{\frac{\zeta}{2}} \,.\, e^{\frac{-\zeta}{2}}$$

Si elevamos ambos miembros a la potencia x, obtenemos:

$$e^{i x \operatorname{sen}\theta} = e^{\frac{x(\zeta - \zeta^{-1})}{2}} = e^{\frac{x\zeta}{2}} \,.\, e^{\frac{-x}{2\zeta}}$$

Al desarrollar las dos exponenciales en serie, encontramos una nueva igualdad:

$$e^{i\,x\,\text{sen}\,\theta} = \left(1 + \frac{x\zeta}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^2\zeta^2}{4} + \frac{1}{3!}\frac{x^3\zeta^3}{8} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{2\zeta} + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{4\zeta^2} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{8\zeta^3} + \ldots\right)$$

Haremos seguidamente el producto de cada uno de los términos de una serie por todos los de la otra. Agrupando los correspondientes a potencias de ζ de igual orden, resulta:

$$\begin{aligned} e^{i\,x\,\text{sen}\,\theta} = {} & \zeta^0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{x^4}{16} - \frac{1}{(3!)^2}\frac{x^6}{64} + \ldots\right) + \\ & + \zeta\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{2!\,3!}\frac{x^5}{2^5} - \frac{1}{3!\,4!}\frac{x^7}{2^7} + \ldots\right) + \\ & + \zeta^2\left(\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{2^4} + \frac{1}{2!\,4!}\frac{x^6}{2^6} - \ldots\right) + \ldots + \\ & + \zeta^{-1}\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^3}{2^3} - \frac{1}{2!\,3!}\frac{x^5}{2^5} + \frac{1}{3!\,4!}\frac{x^7}{2^7} - \ldots\right) + \\ & + \zeta^{-2}\left(\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{2^4} + \frac{1}{2!\,4!}\frac{x^6}{2^6} - \ldots\right) + \ldots \end{aligned} \tag{5.14}$$

Recordemos la fórmula (5.7) de la función Bessel de 1ª clase:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+n}\, m!\,(n+m)!}$$

para valores sucesivos de n, esta función vale, respectivamente:

Para n = 0:

$$J_o(x) = x^0\frac{(-1)^0\, x^0}{2^0\, 0!\, 0!} + x^0\frac{(-1)\, x^2}{2^2\, 1!\, 1!} + x^0\frac{(-1)^2\, x^4}{2^4\, 2!\, 2!} + x^0\frac{(-1)^3\, x^6}{2^6\, 3!\, 3!} + \ldots$$

$$J_o(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{x^4}{16} - \frac{1}{(3!)^2}\frac{x^6}{64} + \ldots$$

Para n = 1:

$$J_1(x) = x^1\frac{(-1)^0\, x^0}{2\, 0!\, 1!} + x^1\frac{(-1)\, x^2}{2^3\, 1!\, 2!} + x^1\frac{(-1)^2\, x^4}{2^5\, 2!\, 3!} + x^1\frac{(-1)^3\, x^6}{2^7\, 3!\, 4!} + \ldots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{2!\,3!}\frac{x^5}{2^5} - \frac{1}{3!\,4!}\frac{x^7}{2^7} + \ldots$$

De modo similar:

$$J_2(x) = \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{2^4} - \frac{1}{2!\,4!}\frac{x^6}{2^6} + \ldots$$

. . .

$$J_{-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^3}{2^3} - \frac{1}{2!\,3!}\frac{x^5}{2^5} + \frac{1}{3!\,4!}\frac{x^7}{2^7} - \ldots$$

$$J_{-2}(x) = \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{2^4} + \frac{1}{2!\,4!}\frac{x^6}{2^6} - \ldots$$

. . .

Podemos ver que cada uno de los paréntesis en la (5.14) se corresponde exactamente con una de las funciones $J_n(x)$. Reemplazando en la mencionada igualdad, se obtiene:

$$e^{i\,x\,\mathrm{sen}\,\theta} = J_o(x) + \zeta\, J_1(x) + \zeta^2\, J_2(x) + \zeta^3\, J_3(x) + \ldots +$$
$$+ \zeta^{-1}\, J_{-1}(x) + \zeta^{-2}\, J_{-2}(x) + \zeta^{-3}\, J_{-3}(x) + \ldots \qquad (5.15)$$

Vimos por otra parte que si n es un entero, entonces:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \,.\, J_n(x),$$

Sustituyendo esta igualdad en la (5.15), y agrupando términos, hallamos:

$$e^{i\,x\,\mathrm{sen}\,\theta} = J_o(x) + (\zeta - \zeta^{-1})\, J_1(x) + (\zeta^2 + \zeta^{-2})\, J_2(x) + (\zeta^3 - \zeta^{-3})\, J_3(x) + \ldots \qquad (5.16)$$

Recurriremos ahora a las ecuaciones (5.13),

$$\zeta^n = \cos n\theta + i\ \mathrm{sen}\, n\theta \qquad y \qquad \zeta^{-n} = \cos n\theta - i\ \mathrm{sen}\, n\theta \qquad (5.13)$$

Sumándolas o restándolas entre sí, deducimos respectivamente:

$$\zeta^n + \zeta^{-n} = 2\cos n\theta$$

y $$\zeta^n - \zeta^{-n} = 2\,i\ \mathrm{sen}\, n\theta$$

Entonces, reemplazando en la (5.16), hallamos:

$$e^{i\,x\,\mathrm{sen}\,\theta} = J_o(x) + 2\ [\, J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \ldots\,] +$$
$$+ 2\,i\ [\, J_1(x)\ \mathrm{sen}\,\theta + J_3(x)\ \mathrm{sen}\,3\theta + J_5(x)\ \mathrm{sen}\,5\theta + \ldots\,] \qquad (5.17)$$

Pero también, como

$$e^{i\,x\,\mathrm{sen}\,\theta} = \cos(x\ \mathrm{sen}\,\theta) + i\ \mathrm{sen}(x\ \mathrm{sen}\,\theta) \qquad (5.18)$$

igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene:

$$\cos(x \operatorname{sen}\theta) = J_o(x) + 2\,[\,J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \dots\,] \quad (5.19)$$

y
$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta) = 2\,[\,J_1(x)\operatorname{sen}\theta + J_3(x)\operatorname{sen}3\theta + J_5(x)\operatorname{sen}5\theta + \dots\,] \quad (5.20)$$

Al multiplicar ambos miembros de la primera de estas igualdades por cos $n\theta$ e integrar luego entre 0 y π, encontramos:

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = J_o(x)\int_0^\pi \cos n\theta\,d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} 2\,J_{2m}(x)\int_0^\pi \cos 2m\theta \cos n\theta\,d\theta$$

En el segundo miembro podemos observar que, con la única excepción del término para el cual n es igual a 2m, todos los demás son nulos, porque están multiplicados por integrales de funciones coseno[(1)] entre los límites 0 y π. Por lo tanto, la ecuación se reduce así:

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\,J_n(x)\int_0^\pi \cos^2 n\theta\,d\theta$$

donde n es entero y par (n = 2m). Ahora sólo queda resolver la última integral:

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta\,d\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2n\theta}{2}\,d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,d\theta + \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Por consiguiente

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos n\theta \,.\, \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta \quad (5.21)$$

De idéntica forma, multiplicando la (5.20) por sen $n\theta$, e integrando, se obtiene, para n impar:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} n\theta \,.\, \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta \quad (5.22)$$

Es posible agrupar estas dos ecuaciones, (5.21) y (5.22) en una sola. En efecto, como la primera de ellas es igual a cero para n impar y la segunda lo es igualmente cuando n es par, podemos decir que, para cualquier valor de n entero y positivo, se satisface la igualdad:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\,\cos n\theta \,.\, \cos(x \operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen} n\theta \,.\, \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta)\,]\,d\theta$$

O también, como el integrando es igual al coseno de la diferencia entre $n\theta$ y $x \operatorname{sen}\theta$:

(1) Recuérdese que $\cos a \cos b = 1/2\,[(\cos a + b) - \cos(a - b)]$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

Pero esta última integral es la misma que la que aparece en la fórmula (5.12), con lo que queda demostrado que

$$\gamma_n = J_n(x)$$

5.5 - Función de Bessel para ν = 0,5:

Un caso particular, interesante por las aplicaciones que se deducen del mismo, es aquel para el cual ν es igual a 0,5. Trataremos en este apartado de hallar la función de Bessel correspondiente. Para ello, reemplazando en la (5.6) obtenemos:

$$J_{0,5}(x) = x^{0,5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+0,5}\, m!\, \Gamma(m + 0,5 + 1)}$$

Que se puede escribir también:

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{0,5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m}\, m!\, \Gamma(m + 1,5)}$$

En el denominador aparece la función Γ (m + 1,5), que analizaremos a partir de la igualdad:

$$\Gamma(n) = (n-1)\, \Gamma(n-1) \qquad (5.23)$$

En este caso:

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{0,5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m}\, m!\, (m + 0,5)\, \Gamma(m + 0,5)} \qquad (5.24)$$

Volviendo a aplicar la misma relación, $\Gamma(n) = (n-1) . \Gamma(n-1)$, esta vez a $\Gamma(m + 0,5)$, y en forma reiterada,

$$\Gamma(m + 0,5) = (m + 0,5 - 1) . \Gamma(m + 0,5 - 1) =$$

$$= (m + 0,5 - 1)(m + 0,5 - 2)(m + 0,5 - 3) \ldots \Gamma(0,5)$$

$$= (m - 0,5)(m - 1,5)(m - 2,5) \ldots \Gamma(0,5)$$

Recordemos que el valor de la función Gamma de 0,5 (Ver Parte I) es:

$$\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$$

Entonces, para m = 0 tenemos:

$$\frac{1}{2}\ \Gamma(0{,}5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Para m = 1:

$$\frac{3}{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\ .\ \frac{1}{2}\ \Gamma(0{,}5) = \frac{3\ \sqrt{\pi}}{4}$$

Para m = 2

$$\frac{5}{2}\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\ .\ \frac{3}{2}\ .\ \frac{1}{2}\ \Gamma(0{,}5) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

. . . .

Notar que por razones de mayor claridad estamos utilizando indistintamente las formas fraccionaria o decimal, según nos convenga en cada oportunidad. Reemplazando en la (5.24), y efectuando operaciones, se obtiene:

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{0,5}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{4\ x^2}{4\ .\ 3\ .\sqrt{\pi}} + \frac{8\ x^4}{16\ .\ 2\ .\ 15\ .\ \sqrt{\pi}} - \ldots\right\}$$

Si sacamos factor común $\sqrt{\pi}$, queda:

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{x}{2\ \pi}\right)^{0,5}\left\{2 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{60} - \ldots\right\}$$

A continuación sacaremos nuevamente factor común, esta vez, 2/x,

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{x}{2\ \pi}\right)^{0,5}\frac{2}{x}\left\{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right\}$$

$$\therefore \qquad J_{0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\ \pi}\right)^{0,5}\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right\}$$

El último factor es igual al desarrollo en serie de sen x. Reemplazando, se obtiene finalmente la función de Bessel para $\nu = 0{,}5$:

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\ \pi}\right)^{0,5} \text{sen } x$$

De modo similar se demuestra que el valor de la función de Bessel para $\nu = -0{,}5$ es:

$$J_{-0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\ \pi}\right)^{0,5} \cos x$$

5.6 - Propiedades de las funciones de Bessel:

Estudiaremos en este apartado y los siguientes algunas propiedades de las funciones de Bessel. En primer lugar, demostraremos la igualdad:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x) \right] = - x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{5.25}$$

La demostración más sencilla consiste en trabajar con ambos miembros en forma separada, hasta llegar a una misma expresión, lo que nos permitirá, por carácter transitivo, confirmar la validez de la ecuación. Empezaremos por el miembro de la izquierda. Para ello, tomemos la (5.7), y multipliquémosla por x^{-n}, con lo cual obtenemos:

$$x^{-n} J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!}$$

que ahora debemos derivar respecto de x:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m+n} m! (n+m)!} \tag{5.26}$$

Pasaremos ahora a analizar la función de Bessel $J_{n+1}(x)$, que aparece en el miembro de la derecha en la (5.25), y cuya forma es la siguiente:

$$J_{n+1}(x) = x^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n+1} m! (n+m+1)!}$$

Mulitiplicaremos ambos miembros por x^{-n}:

$$x^{-n} J_{n+1}(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n+1} m! (n+m+1)!}$$

A continuación vamos a recurrir al artificio de reemplazar:

$$m + 1 = k$$

y por tanto,

$$m = k - 1$$

Entonces:

$$x^{-n} J_{n+1}(x) = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{2^{2k-2+n+1} (k-1)! (n+k)!} \tag{5.27}$$

Al llegar aquí introduciremos en la sumatoria el término correspondiente a k = 0, aprovechando que el mismo es nulo, con lo cual no altera el valor de la sumatoria. Efectivamente, como el producto factorial de un número entero negativo, en este caso (-1)!, es infinito, entonces:

$$\left. \frac{(-1)^{k-1}\, x^{2k-2}}{2^{2k-2+n+1}\,(k-1)!\,(n+k)!} \right|_{k=0} = \frac{(-1)^{-1}\, x^{-2}}{2^{-2+n+1}\,(-1)!\,(n)!} = 0$$

Ello nos permite completar la sumatoria en la (5.27), agregándole el término mencionado sin que la misma se altere en absoluto. Es decir:

$$x^{-n}\, J_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, x^{2k-2}}{2^{2k+n-1}\,(k-1)!\,(n+k)!}$$

Si introducimos la variable x dentro de la sumatoria, y multiplicamos numerador y denominador por 2 k, obtenemos:

$$x^{-n}\, J_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} . x . 2 . k . x^{2k-2}}{2^{2k+n-1}\, 2k\,(k-1)!\,(n+k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} . 2k . x^{2k-1}}{2^{2k+n}\,(k)!\,(n+k)!}$$

Apelando también a la igualdad:

$$(-1)^{k-1} = (-1)^{k} . (-1)^{-1} = -(-1)^{k},$$

llegamos por fin a la ecuación:

$$-x^{-n}\, J_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} . 2k . x^{2k-1}}{2^{2k+n}\,(k)!\,(n+k)!}$$

cuyo segundo miembro es idéntico al de la (5.26), salvo porque en la sumatoria hemos reemplazado el nombre del índice m por k. Queda por lo tanto demostrada la propiedad (5.25).

Más sencillo resulta demostrar la propiedad siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}\, J_{n}(x) \right] = x^{n}\, J_{n-1}(x) \tag{5.28}$$

En efecto, en este caso, a partir de (5.7) tenemos:

$$x^{n}\, J_{n}(x) = x^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\, x^{2m}}{2^{2m+n}\, m!\,(m+n)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\, x^{2(m+n)}}{2^{2m+n}\, m!\,(m+n)!}$$

Derivando respecto de x:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}\, J_{n}(x) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\, 2(m+n)\, x^{2(m+n)-1}}{2^{2m+n}\, m!\,(m+n)!}$$

Dividimos ahora numerador y denominador por 2 y por (m + n), y operando, se obtiene en forma sucesiva:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2(m+n)-1}}{2^{2m+n-1}\, m!\, (m+n-1)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m+(n-1)}}{2^{2m+(n-1)}\, m!\, (m+n-1)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n . x^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+(n-1)}\, m!\, (m+n-1)!} = x^n J_{n-1}(x)$$

Con lo cual queda demostrada la (5.28).

5.7 - Propiedades de las raíces.

En este apartado veremos algunas propiedades relacionadas con las raíces de las funciones de Bessel.

1 - Alternancia de las raíces de $J_{n-1}(x)$ y $J_n(x)$.

De las ecuaciones (5.25) y (5.28):

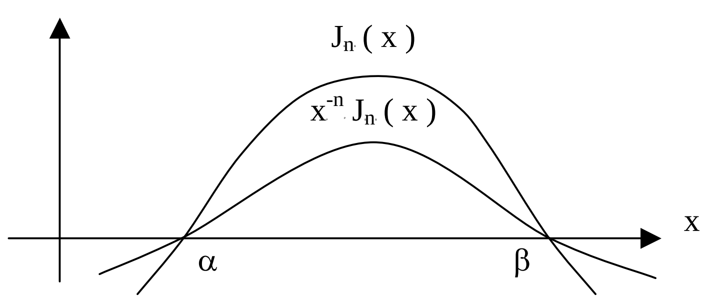
$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

surge que entre cada dos ceros de $J_n(x)$ cae un cero de $J_{n+1}(x)$ y a la inversa. Lo mismo vale para las funciones $J_{n-1}(x)$ y $J_n(x)$. Y por extensión a todas las funciones de la familia.

Notemos en primer lugar que la función $x^n J_n(x)$ tiene los mismos ceros que $J_n(x)$, más otros n ceros ubicados en el origen de coordenadas.



Por su parte, la función $x^{-n} J_n(x)$ tendrá también los mismos ceros que $J_n(x)$, más otros n ceros ubicados en el infinito.

Es decir que si α y β son dos ceros consecutivos, no nulos ni impropios, de $J_n(x)$, también lo son de $x^n J_n(x)$ y de $x^{-n} J_n(x)$.

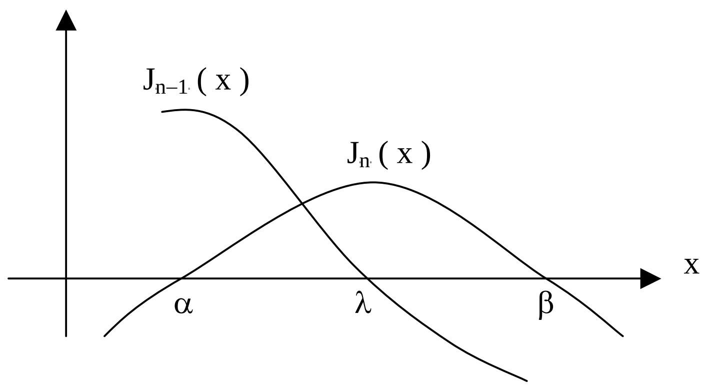
Además, entre α y β debe existir un valor λ para el cual $x^n J_n(x)$ presente un máximo o un mínimo. Dicho valor λ es en consecuencia un cero de la función

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

y por lo tanto, por un razonamiento similar, también lo es de $J_{n-1}(x)$.

Es decir: $J_{n-1}(\lambda) = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$

Veamos esto en forma gráfica:



Razonando en forma inversa que antes, podemos decir que si λ es un cero no nulo de $x^n J_{n-1}(x)$

$$\lambda^n J_{n-1}(\lambda) = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$$

es necesariamente también un cero de $J_{n-1}(x)$. Esto es lógico, puesto que los n ceros de x^n están todos en el origen.

De modo similar, entre α y β debe existir un valor, δ, para el cual $x^{-n} J_n(x)$ presente un máximo o un mínimo. Dicho valor es en consecuencia un cero de la función

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Por lo tanto, si δ es un cero no infinito de $x^{-n} J_{n+1}(x)$, es decir

$$\delta^{-n} J_{n+1}(\delta) = 0 \qquad (\delta \neq \infty)$$

entonces δ es necesariamente un cero de $J_{n+1}(x)$.

2 - Las funciones de Bessel tienen infinitos ceros.

Es posible demostrar que las funciones de Bessel tienen infinitos ceros. O, lo que es igual, que la ecuación:

$$J_n (x) = 0$$

para todo n, tiene infinitas raíces.

La representación de las funciones $J_0 (x)$ y $J_1 (x)$, al final del parágrafo 5.2, no deja dudas al respecto. Al aplicar a las mismas la propiedad 1, deducimos que también $J_2 (x)$ tendría infinitas raíces, y por inducción, lo mismo debería ocurrir con todas las funciones de Bessel de primera clase y coeficiente n, entero.

Volveremos más adelante sobre este punto.

3 - Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables diferentes:

Sean las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$u'' (x) + g (x) . u (x) = 0 \tag{5.29}$$

y

$$v'' (x) + h (x) . v (x) = 0 \tag{5.30}$$

con la condición: $h (x) \neq g (x)$

Esta condición es necesaria, puesto que si h y g fueran iguales, estaríamos en presencia de una misma ecuación.

Despejando en las (5.29) y (5.30) hallamos:

$$u'' (x) = - u . g$$

y

$$v'' (x) = - v . h$$

Si multiplicamos ambos miembros por v en la primera ecuación y por u en la segunda, es decir:

$$u'' v = - u v . g$$

y

$$v'' u = - u v . h$$

y restamos miembro a miembro, resulta:

$$v u'' - u v'' = (h - g) . u v \tag{5.31}$$

Si α y β son *dos raíces consecutivas* de la ecuación $u (x) = 0$, lo que equivale a decir que:

$$u (\alpha) = 0$$

y

$$u (\beta) = 0,$$

como el segundo miembro de la (5.31) es igual a cero, debe cumplirse necesariamente que

$$v(\alpha) \,.\, u''(\alpha) - u(\alpha) \,.\, v''(\alpha) = 0$$

o también:

$$v(\beta) \,.\, u''(\beta) - u(\beta) \,.\, v''(\beta) = 0$$

De aquí:

$$v(\alpha) \,.\, u''(\alpha) = u(\alpha) \,.\, v''(\alpha) = 0 \qquad (5.32)$$

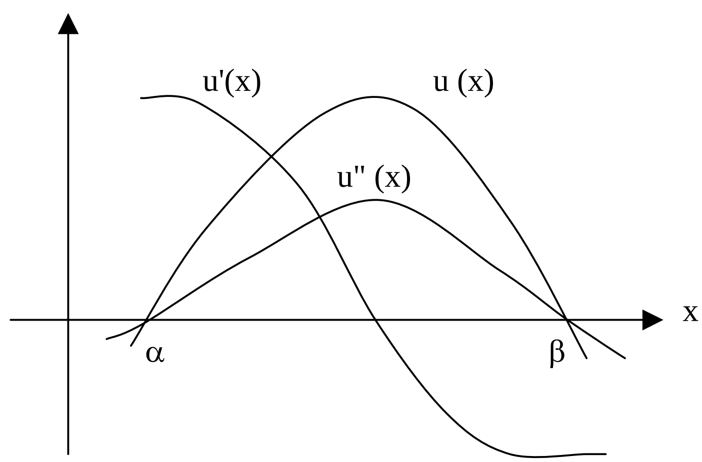
y

$$v(\beta) \,.\, u''(\beta) = u(\beta) \,.\, v''(\beta) = 0 \qquad (5.33)$$

Supongamos por un momento que elegimos una función v (x) que satisface la ecuación diferencial (5.30), pero tal que ni α ni β sean raíces suyas.

En tal caso, es evidente que para que se cumplan las relaciones (5.32) y (30,.33), la derivada segunda de la función u (x) debe ser nula en α y en β, respectivamente.

La explicación anterior nos fuerza a aceptar que u (x) y sus derivadas primera y segunda deben comportarse aproximadamente como muestra la figura siguiente:



Ahora procederemos a integrar la ecuación (5.31) entre α y β:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (v\,u'' - u\,v'')\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) \,.\, u\,v \,.\, dx$$

Y calcularemos la primera integral por partes. Para lo cual, teniendo en cuenta que

$$u''\,dx = \frac{du'}{dx}\,dx = du'$$

y lo mismo:

$$v''\,dx = dv'$$

la procederemos a modificar previamente así:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (v\, du' - u\, dv') = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) . u\, v . dx$$

$$\therefore \qquad \int_{\alpha}^{\beta} v\, du' - \int_{\alpha}^{\beta} u\, dv' = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) . u\, v . dx$$

$$\therefore \qquad v\, u' \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v'\, u'\, dx - u\, v' \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} u'\, v'\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) . u\, v . dx$$

Simplificando las dos primeras integrales, iguales entre sí, resulta

$$\therefore \qquad (v\, u' - u\, v') \Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) . u\, v . dx \qquad (5.34)$$

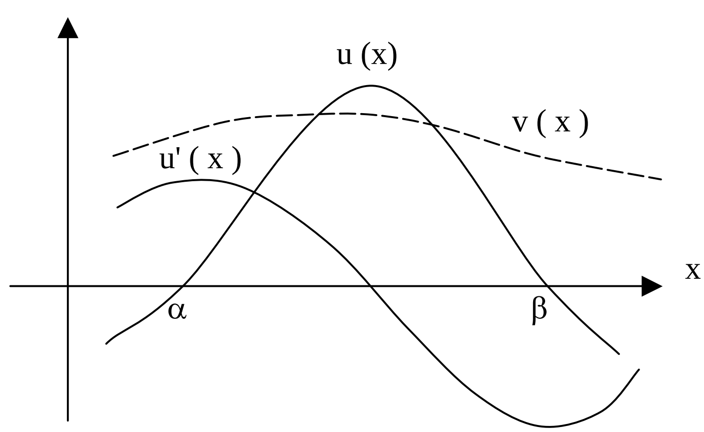
es decir:

$$v (\beta) u' (\beta) - u (\beta) v' (\beta) - v (\alpha) u' (\alpha) + u (\alpha) v' (\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g)\, u\, v\, dx$$

Pero como $u (\alpha) = 0$ y $u (\beta) = 0$, simplificando nuevamente queda:

$$v (\beta) u' (\beta) - v (\alpha) u' (\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g)\, u\, v\, dx \qquad (5.35)$$

Supongamos ahora que la función $v (x)$, que como dijimos no es nula ni en α ni en β, se mantiene positiva (negativa) en todo el intervalo entre α y β. Hagamos aquí también un análisis gráfico mostrando la situación en el intervalo $\alpha\ \beta$:



La figura muestra en primer lugar que $u' (\alpha)$ tiene distinto signo que $u' (\beta)$.

También observamos en la ecuación (5.35) que si v (x) se mantiene positiva (o negativa) en todo el intervalo α β, el primer término de la ecuación no puede ser igual a cero en níngún punto del mismo, por lo que la integral no puede ser nula en el intervalo, lo que implica que, necesariamente, debe ser

$$h(x) \neq g(x)$$

Esto es obvio, porque si fueran iguales, la integral sería nula.

4 - Raíces de $J_o(x)$:

Volvamos a la ecuación de Bessel (5.1):

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)\, y = 0$$

y hagamos en ella el cambio de variable:

$$u = y \sqrt{x} \qquad (5.36)$$

$$\therefore \qquad y = u\, x^{-1/2}$$

La derivada primera de esta función es

$$y' = u'\, x^{-1/2} - \frac{1}{2}\, u\, x^{-3/2}$$

y la derivada segunda:

$$y'' = u''\, x^{-1/2} - \frac{1}{2}\, u'\, x^{-3/2} - \frac{1}{2}\, u'\, x^{-3/2} + \frac{3}{4}\, u\, x^{-5/2}$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial de Bessel obtenemos:

$$x^2 \left(\frac{u''}{\sqrt{x}} - \frac{u'}{x\sqrt{x}} + \frac{3\, u}{4\, x^2 \sqrt{x}} \right) + x \left(\frac{u'}{\sqrt{x}} - \frac{u}{2x\sqrt{x}} \right) + (x^2 - n^2)\, \frac{u}{\sqrt{x}} = 0$$

Ecuación que, una vez simplificada, queda así:

$$x^2 u'' - x u' + \frac{3\, u}{4} + x u' - \frac{u}{2} + x^2 u - n^2 u = 0$$

Simplificando de nuevo y agrupando los coeficientes de las potencias de igual grado de la variable u, resulta

$$x^2 u'' + u \left(x^2 - n^2 + \frac{1}{4} \right) = 0$$

Dividiendo por x^2 y reagrupando términos, esta ecuación se puede modificar como sigue:

$$u'' + u\left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) = 0 \qquad (5.37)$$

En el caso en que n = 0, la ecuación anterior se simplifica más aún, quedando:

$$u'' + u\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) = 0 \qquad (5.38)$$

Sintetizando:

- Esta ecuación es la misma que la (5.29), con

$$g = 1 + \frac{1}{4x^2} \qquad (5.39)$$

- Su solución es:

$$u = y\sqrt{x}$$

- Además, como se trata de la ecuación de Bessel, con n = 0, también debe ser

$y = J_o$.

Por tanto:

$$u = y\sqrt{x} = J_o(x)\sqrt{x} \qquad (5.40)$$

Verificaremos a continuación esta afirmación. Si en la ecuación (5.7),

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}\, m!\,(n+m)!}$$

hacemos n = 0, entonces:

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}\,(m!)^2}$$

Es decir:

$$J_o(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{x^4}{16} - \frac{1}{(3!)^2}\frac{x^6}{64} + \ldots$$

Reemplazado en la (5.40), nos queda:

$$u = \sqrt{x}\, J_o(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{5/2} + \frac{1}{64}x^{9/2} - \frac{1}{2304}x^{13/2} + \ldots$$

Derivaremos ahora para obtener u':

$$u' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{8}x^{3/2} + \frac{9}{128}x^{7/2} - \frac{13}{4608}x^{11/2} + \ldots$$

Y derivando nuevamente,

$$u'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{15}{16}x^{1/2} + \frac{63}{256}x^{5/2} - \frac{143}{9216}x^{9/2} + \ldots\ldots$$

También:

$$\frac{u}{4x^2} = \frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{1}{16}x^{1/2} + \frac{1}{256}x^{5/2} - \frac{1}{9216}x^{9/2} + \ldots$$

Basta reemplazar estos valores en la (5.38), para verificar que efectivamente la (5.40) es una solución de la misma. En efecto, de tal reemplazo resulta:

$$u'' + u + \frac{u}{4x^2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{15}{16}x^{1/2} + \frac{63}{256}x^{5/2} - \frac{143}{9216}x^{9/2} + \ldots +$$

$$+ x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{5/2} + \frac{1}{64}x^{9/2} - \frac{1}{2304}x^{13/2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{1}{16}x^{1/2} + \frac{1}{256}x^{5/2} - \frac{1}{9216}x^{9/2} + \ldots$$

Y al agrupar en esta ecuación los coeficientes de las potencias de x de igual grado, hallamos:

$$u'' + u + \frac{u}{4x^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)x^{-3/2} + \left(\frac{16}{16} - \frac{15}{16} - \frac{1}{16}\right)x^{1/2} +$$

$$+ \left(\frac{63}{256} - \frac{64}{256} + \frac{1}{256}\right) - \left(\frac{143}{9216} - \frac{144}{9216} + \frac{1}{9216}\right)x^{9/2} + \ldots$$

Como todos los coeficientes resultan nulos, comprobamos que, efectivamente, la (5.40) es solución de la (5.38).

Volvamos ahora a la ecuación (5.30) y hagamos en ella $h(x) = 1$. Este valor satisface la condición

$$h(x) \neq g(x).$$

En efecto, para cualquier

$x \neq \infty$, se verifica que:

$$g = 1 + \frac{1}{4x^2} > h = 1$$

Al reemplazar en (5.30) el valor adoptado para h, la misma queda así:

$$v'' + v = 0$$

Una solución de esta ecuación es:

En efecto:

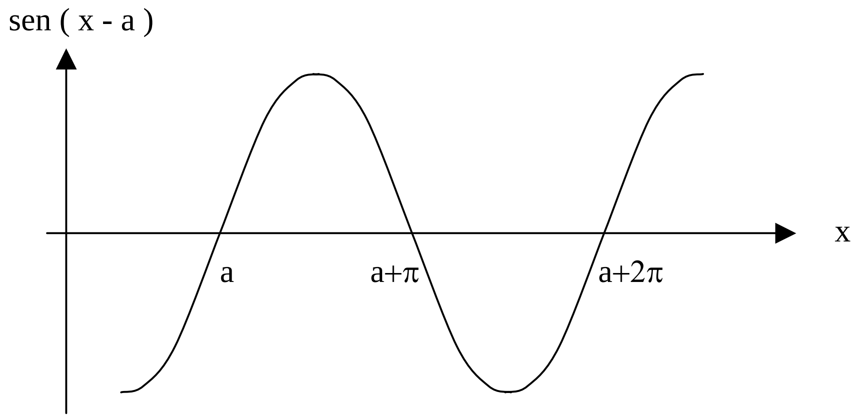
$$v = \text{sen}(x - a) \qquad \text{con} \quad a = \text{cte.}$$

$$v' = \cos(x - a)$$

y

$$v'' = -\text{sen}(x - a)$$

Consideremos ahora dos raíces consecutivas de v (x): a y a + π



Las raíces consecutivas de las funciones de Bessel, a partir de la segunda, están separadas entre sí por un valor muy próximo a π. Efectivamente, en el caso de J_0, las primeras raíces caen en:

x = 2,40, 5,52, 8,6557, 11,7915, 14,9298, etc.

Por su parte, las de J_1 están ubicadas en

x = 0, 3,83, 7,015, 10,17, 13,32, etc.

Estos valores confirman, por una parte, la alternancia entre las raíces de una y otra función, y por la otra, que la separación entre raíces consecutivas es muy próxima a π. En efecto, en el primer caso, la separación es respectivamente:

3,120, 3,1357, 3,1358, 3,1383, . . .

O, tratándose de J_1,

3,185, 3,155, 3,150, . . .

De todo lo visto, podemos extraer las siguientes conclusiones: A partir de la ecuación:

$$v\,u'' - u\,v'' = (h - g)\,.\,u\,v \tag{5.31}$$

Si α es una raíz de u (x), es decir, u (α) = 0, entonces

$$v(\alpha) = 0 \qquad \text{ó} \qquad u''(\alpha) = 0$$

Por idéntico razonamiento, si β es una raíz de u (x),

$$v(\beta) = 0 \qquad \text{ó} \qquad u''(\beta) = 0$$

Por otra parte, a partir de la igualdad:

$$v(\beta)\,u'(\beta) - v(\alpha)\,u'(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g)\,.\,u(x)\,.\,v(x)\,dx \tag{5.35}$$

podemos dedudcir que si $h \neq g$, entonces

$$v(\beta)\,u'(\beta) - v(\alpha)\,u'(\alpha) \neq 0$$

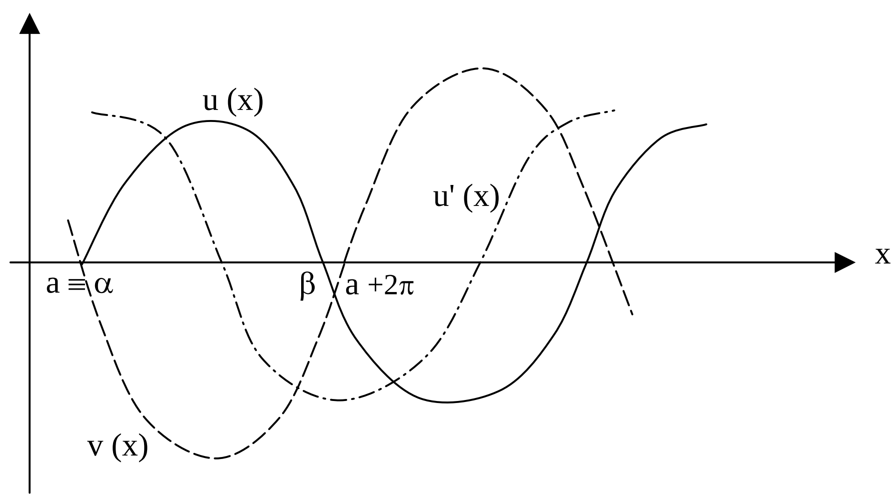
O, lo que es igual:

$$v(\beta)\,u'(\beta) \neq v(\alpha)\,u'(\alpha)$$

De aquí podemos deducir también que, si

$$v(\alpha) = 0, \quad \text{entonces} \qquad v(\beta) \neq 0$$

Supongamos ahora que elegimos el punto a coincidente con α. Como dos raíces cualesquiera de la función $J_o(x)$, que son a su vez raíces de $u(x)$, difieren entre sí un valor muy aproximado, pero no exactamente igual, a π, nos encontraremos con una situación aproximada a la que representa la figura siguiente:



La figura muestra que entre cada dos raíces de $v(x)$ cae una raíz de $J_o(x)$. Nótese que la función $v(x)$ conserva su signo entre α y β, lo que satisface el postulado que acompaña a la ecuación (5.35):

Si $v(x)$ se mantiene positiva (o negativa) en todo el intervalo $\alpha\,\beta$, el primer término de la ecuación no puede ser igual a cero en níngún punto del mismo, por lo que la integral no puede ser nula en el intervalo, lo que implica que, necesariamente, debe ser

$$h(x) \neq g(x)$$

5.8 - Ortogonalidad de las Funciones de Bessel.

En esta sección probaremos que las funciones de Bessel forman *un conjunto ortogonal* en el intervalo entre x = 0 y x = 1. Para ello en la ecuación diferencial de Bessel, (5.1), reemplazaremos la variable x por

$\sigma = ax$, donde a es una constante arbitraria.

La ecuación de Bessel queda entonces así:

$$\sigma^2 \cdot J_n''(\sigma) + \sigma \cdot J_n'(\sigma) + (\sigma^2 - n^2) \cdot J_n(\sigma) = 0 \qquad (5.41)$$

Derivando $J_n(\sigma)$ respecto de x obtenemos:

$$\frac{d\,J_n(\sigma)}{d\,x} = \frac{d\,J_n(\sigma)}{d\sigma}\,\frac{d\,\sigma}{d\,x} = a\,\frac{d\,J_n(\sigma)}{d\,\sigma}$$

$$\therefore \qquad \frac{d\,J_n(\sigma)}{d\,\sigma} = \frac{1}{a}\,\frac{d\,J_n(\sigma)}{dx} = \frac{J'_n(\sigma)}{a}$$

Derivando nuevamente, la derivada segunda es:

$$\frac{d^2\,J_n(\sigma)}{d\,\sigma^2} = \frac{J''_n(\sigma)}{a^2}$$

$J_n'(\sigma)$ y $J_n''(\sigma)$ son la derivadas respecto de x. Reemplazando en (5.41), la misma queda así:

$$x^2 \cdot J_n''(\sigma) + x \cdot J_n'(\sigma) + (a^2 x^2 - n^2)\, J_n(\sigma) = 0$$

o también, dividiendo por x^2:

$$J_n''(\sigma) + \frac{1}{x}\,J_n'(\sigma) + \left(a^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(\sigma) = 0 \qquad (5.42)$$

También aquí ensayaremos la solución:

$$u = J_n \sqrt{x}$$

$$\therefore \qquad J_n = u\,x^{-1/2}$$

Derivando respecto de x:

$$\therefore \qquad J_n' = u'\,x^{-1/2} - \frac{1}{2}\,u\,x^{-3/2}$$

Y derivando una vez más:

$$\therefore \qquad J_n'' = u''\,x^{-1/2} - \frac{1}{2}\,u'\,x^{-3/2} - \frac{1}{2}\,u'\,x^{-3/2} + \frac{3}{4}\,u\,x^{-5/2} =$$

$$\therefore \qquad = u'' x^{-1/2} - u' x^{-3/2} + \frac{3}{4} u x^{-5/2}$$

Por fin, al remplazar en la (5.42), la ecuación diferencial queda ahora formulada así:

$$u'' x^{-1/2} - u' x^{-3/2} + \frac{3}{4} u x^{-5/2} + u' x^{-3/2} - \frac{1}{2} u x^{-5/2} + a^2 u x^{-1/2} - n^2 u x^{-5/2} = 0$$

A continuación, simplificaremos los dos términos en u', multiplicaremos el resto por $x^{1/2}$, y agruparemos los coeficientes de u; con lo cual la ecuación se reduce a la forma siguiente:

$$u'' + \left(\frac{1}{4x^2} + a^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0$$

Reagrupando de nuevo, la ecuación puede ahora sintetizarse como vemos aquí abajo:

$$u'' + \left(a^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} \right) u = 0 \qquad (5.43)$$

Si en lugar del reemplazo σ = ax hubiéramos hecho σ = bx, siguiendo idénticos pasos habríamos llegado a una ecuación totalmente similar, excepto por el nombre de la variable:

$$v'' + \left(b^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} \right) v = 0 \qquad (5.44)$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden simbolizar así:

$$u'' + G(x) . u = 0$$

y $$v'' + H(x) . v = 0$$

donde $$G(x) = a^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}$$

y $$H(x) = b^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}$$

Si nos detenemos un instante para analizar lo hecho hasta aquí, podemos ver que estas ecuaciones son idénticas a las (5.29) y (5.30), a partir de las cuales obtuvimos en su momento la (5.34).

Siguiendo ahora los mismos pasos que en aquella ocasión, pero integrando esta vez entre los límites 0 y x, llegamos a la igualdad siguiente:

$$\therefore \qquad (v u' - u v') \Big|_0^x = \int_0^x (H - G) . u v . dx$$

Si restamos G (x) de H (x), es decir:

$$H - G = b^2 - a^2$$

y reemplazamos en la integral anterior, nos queda:

$$\therefore \qquad (v\,u' - u\,v') \Big|_0^x = (b^2 - a^2) \int_0^x u\,v \, . \, dx \tag{5.45}$$

y como

$$u = \sqrt{x} \; . \; J_n (ax)$$

y

$$v = \sqrt{x} \; . \; J_n (bx)$$

obtenemos finalmente:

$$\therefore \qquad (v\,u' - u\,v') \Big|_0^x = (b^2 - a^2) \int_0^x x \, . \, J_n (ax) \, . \, J_n (bx) \, . \, dx$$

Las derivadas de u y v son, respectivamente:

$$u' = \frac{1}{2} \, x^{-1/2} J_n (ax) + a\, x^{1/2} J'_n (ax)$$

y

$$v' = \frac{1}{2} \, x^{-1/2} J_n (bx) + b\, x^{1/2} J'_n (bx)$$

Por tanto:

$$v\,u' - u\,v' = \frac{1}{2} \, J_n (ax) \, J_n (bx) + a\,x \, J'_n (ax) \, J_n (bx) -$$

$$- \frac{1}{2} \, J_n (bx) \, J_n (ax) - b\,x \, J'_n (bx) \, J_n (ax)$$

$$\therefore \qquad v\,u' - u\,v' = x \left(a\, J'_n (ax) \, J_n (bx) - b\, J'_n (bx) \, J_n (ax) \right)$$

Reemplazamos ahora en (5.45), y obtenemos

$$(b^2 - a^2) \int_0^x x \, J_n (ax) \, J_n (bx) \; x = x \left(a\, J'_n (ax) \, J_n (bx) - b\, J'_n (bx) \, J_n (ax) \right)$$

Al establecer el intervalo de integración entre 0 y 1, la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$(b^2 - a^2) \int_0^1 x \, J_n (ax) \, J_n (bx) \, dx = a\, J'_n (a) \, J_n (b) - b\, J'_n (b) \, J_n (a) \tag{5.46}$$

A continuación analizaremos una por una las diferentes alternativas que pueden darse respecto de esta ecuación.

Primer caso: a y b son ceros de $J_n(x)$ Entonces, el segundo miembro de la (5.46) es igual a cero:

$$(b^2 - a^2)\int_0^1 x\, J_n(ax)\,.\,J_n(bx)\,dx = 0$$

Estamos en presencia de dos factores cuyo producto es cero. Existen dos posibilidades: Si ambas raíces son distintas, $a \neq b$, o la integral es nula, o bien $a = -b$. Obviamente entonces, para que la integral

$$\int_0^1 x\; J_n^2(ax)\; dx \tag{5.47}$$

sea distinta de cero, la única posibilidad es que:

$$a^2 = b^2$$

Esta es por tanto la condición de ortogonalidad.

Segundo caso: Una segunda alternativa consiste en que a y b sean ambas raíces de la ecuación

$$J'_n(x) = 0,$$

observando la (5.46) vemos que se reproduce una situación idéntica a la del primer caso. Es decir, que la condición necesaria para que la integral (5.47) sea no nula es la misma que antes:

$$a^2 = b^2$$

Tercer caso: a y b son ambas raíces de la ecuación

$$J_{n+1}(x) = 0 \tag{5.48}$$

De acuerdo con la (5.25), sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\, J_n(x)\right) = -\, x^{-n}\, J_{n+1}(x)$$

Al efectuar esta derivada llegamos a la igualdad:

$$-\, n\, x^{-n-1}\, J_n(x) + x^{-n}\, J'_n(x) = -\, x^{-n}\, J_{n+1}(x)$$

Simplificando x^{-n} en los dos miembros de la misma, obtenemos

$$-\, n\, x^{-1}\, J_n(x) + J'_n(x) = -\, J_{n+1}(x)$$

$\therefore \qquad J_{n+1}(x) + J'_n(x) = n\,x^{-1}\,J_n(x)$

Pero a y b son raíces de la (5.48), es decir:

$$J_{n+1}(a) = 0$$

$$J_{n+1}(b) = 0,$$

entonces:

$$J'_n(a) = n\,a^{-1}\,J_n(a)$$

o bien:

$$a\,J'_n(a) = n\,J_n(a)$$

De modo similar obtendríamos:

$$b\,J'_n(b) = n\,J_n(b)$$

Multiplicando estas dos últimas igualdades entre sí, en forma cruzada, obtenemos:

$$b\,J'_n(b)\;n\,J_n(a) = a\,J'_n(a)\;n\,J_n(b) \tag{5.49}$$

De aquí, simplificando n en ambos miembros y pasando todo al primero, resulta:

$$b\,J'_n(b)\,J_n(a) - a\,J'_n(a)\,J_n(b) = 0$$

El primer miembro de esta última igualdad coincide exactamente con el último miembro de la (5.46). Por tanto, nuevamente deberá ser nula la integral que aparece en ella, salvo que fueran

$$a^2 = b^2$$

La conclusión obvia es que esta tercera alternativa es equivalente a los dos anteriores.

Cuarta posibilidad: a y b son dos raíces, diferentes, de

$$J_{n-1}(x) = 0 \tag{5.50}$$

Según la (5.28), sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\,J_n(x)\right] = x^n\,J_{n-1}(x)$$

Efectuando esta derivada llegamos a la expresión:

$$n\,x^{n-1}\,J_n(x) + x^n\,J'_n(x) = x^n\,J_{n-1}(x)$$

Simplificamos aquí x^n antes de pasar todo al primer miembro:

$$n\,x^{-1}\,J_n(x) + J'_n(x) = J_{n-1}(x)$$

$$\therefore \qquad n\,J_n(x) + x\,J'_n(x) - x\,J_{n-1}(x) = 0 \tag{5.51}$$

Como a y b son raíces de la (5.50), es decir:

$$J_{n-1}(a) = 0$$

$$J_{n-1}(b) = 0,$$

Al reemplazar cada una de estas igualdades en la ecuación (5.51), ésta queda, respectivamente igual a:

$$n\ J_n(a) = -a\ J'_n(a)$$

ó,
$$b\ J'_n(b) = -n\ J_n(b)$$

Multiplicando miembro a miembro verificamos que:

$$b\ J'_n(b)\ n\ J_n(a) = a\ J'_n(a)\ n\ J_n(b)$$

Pero ya habíamos obtenido esta igualdad, en la ecuación (5.41), por lo que también la cuarta posibilidad conduce a un resultado idéntico a los tres primeros supuestos.

Quinta posibilidad: Consideremos ahora la ecuación:

$$x\ J'_n(x) + C\ J_n(x) = 0$$

en la que C es una constante arbitraria, en tanto que a y b son dos raíces distintas de la ecuación, es decir:

$$a\ J'_n(a) + C\ J_n(a) = 0$$

y

$$b\ J'_n(b) + C\ J_n(b) = 0$$

O bien:

$$a\ J'_n(a) = -C\ J_n(a)$$

y

$$b\ J'_n(b) = -C\ J_n(b)$$

Si como en los casos anteriores, multiplicamos miembro a miembro en forma cruzada, tendremos:

$$a\ J'_n(a)\ .C\ J_n(b) = b\ J'_n(b)\ .C\ J_n(a)$$

Simplificando C, y pasando todo al primer miembro, obtenemos nuevamente una ecuación que ya nos está resultando familiar:

$$b\ J'_n(b)\ .\ J_n(a) - a\ J'_n(a)\ .\ J_n(b) = 0$$

La conclusión es, una vez más, que este caso es también similar a los anteriores. En resumen, si se cumple que a y b son raíces de cualesquiera de las cinco ecuaciones supuestas, la condición necesaria para que la integral

$$\int_0^1 x\ J_n(ax)\ J_n(bx)\ dx$$

sea distinta de cero es en todos los casos la misma: $a^2 = b^2$

Conclusión: Condiciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel, en el intervalo {0;1}

Recordemos que dos funciones, $f_j(x)$ y $f_k(x)$, de un conjunto son ortogonales entre sí cuando

$$\int_a^b f_j(x)\, f_k(x)\, dx = \begin{cases} = 0, & \text{si } j \neq k \\ \neq 0, & \text{si } j = k \end{cases}$$

En ocasiones, la ortogonalidad requiere la existencia de una función "complemento" o "peso", g (x), de la siguiente forma:

$$\int_a^b g(x)\, f_j(x)\, f_k(x)\, dx = \begin{cases} = 0, & \text{si } j \neq k \\ \neq 0, & \text{si } j = k \end{cases}$$

Tal es el caso de las funciones de Bessel, donde:

- El complemento es $g(x) = x$, como puede verse en los cinco casos expuestos.
- Las funciones $f_j(x)$ y $f_k(x)$ son, respectivamente:

$$f_j(x) = J_n(ax) = J_n(\alpha_j x)$$

y $$f_k(x) = J_n(bx) = J_n(\alpha_k x)$$

Partiendo de esto, si llamamos C al conjunto de las funciones Bessel de primera clase:

$$C = [\, J_n(\alpha_i x)\,]$$

constituye un Conjunto Ortogonal de funciones en el intervalo {0, 1}, cuyo *peso* es $g(x) = x$.

Es decir que si:

$$J_n(\alpha_j x) \in C \qquad \text{y} \qquad J_n(\alpha_k x) \in C$$

entonces:

$$\int_0^1 x\, J_n(\alpha_j x)\, J_n(\alpha_k x)\, dx = \begin{cases} = 0, & \text{si } \alpha_j^2 \neq \alpha_k^2 \\ \neq 0, & \text{si } \alpha_j^2 = \alpha_k^2 \end{cases}$$

5.9 - Desarrollo de funciones en serie de Funciones de Bessel:

En el apartado anterior hemos demostrado que las funciones de Bessel

$$J_n(x), \qquad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

constituyen un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, y que lo mismo ocurre en el caso de las familias de funciones siguientes

$$J_n(\alpha_i x),\ J_{n+1}(\alpha_i x),\ J_{n-1}(\alpha_i x),\ J'_n(\alpha_i x),\ x J'_n(\alpha_i x) + C\ J_n(\alpha_i x),$$

Por consiguiente es posible en principio desarrollar una función f (x) como una suma constituida por los infinitos términos de una cualquiera de las familias mencionadas, donde el parámetro i varía de cero a infinito. Por ejemplo:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\ J_n(\alpha_i x) = c_o\ J_n(\alpha_o x) + c_1 J_n(\alpha_1 x) + c_2 J_n(\alpha_2 x) + \ldots$$

En los textos especializados se encuentran tablas de los valores de $J_n(\alpha_i x)$.

Esta sumatoria constituye de hecho una serie generalizada de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \phi_n(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \ldots + c_n \cdot \phi_n(x) + \ldots \tag{5.52}$$

en la cual:

$$\phi_j(x) = J_n(\alpha_j x)$$

y

$$\phi_k(x) = J_n(\alpha_k x)$$

Si multiplicamos ambos miembros de la serie (5.52) por $\phi_k(x)$ y a continuación integramos en un período que en forma genérica vamos a designar como a, b, resultará:

$$\int_a^b f(x) \cdot \phi_k(x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \int_a^b \phi_k(x) \cdot \phi_n(x) \cdot dx =$$

$$= c_1 \int_a^b \phi_1(x) \cdot \phi_k(x)\ dx + c_2 \int_a^b \phi_2(x) \cdot \phi_k(x)\ dx + \ldots +$$

$$+ c_k \int_a^b \phi_k(x) \cdot \phi_k(x)\ dx + \ldots$$

Pero

$$\int_a^b \phi_k(x) \cdot \phi_n(x) \cdot dx \ \left| \begin{array}{ll} = M_k & \text{si } k = n \\ \\ = 0 & \text{si } k \neq n \end{array} \right. \tag{5.53}$$

De aquí llegamos a la siguiente igualdad, que nos permite definir los coeficientes c_k.

$$\int_a^b f(x) \cdot \phi_k(x) \cdot dx = c_k \cdot M_k \tag{5.54}$$

Al introducir este resultado en la sumatoria podemos escribir, cambiando el nombre de la variable de integración para evitar confusiones:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \,.\, \frac{1}{M_k} \int_a^b f(\xi) \,.\, \phi_k(\xi) \,.\, d\xi$$

El segundo miembro en esta ecuación constituye lo que se conoce como una *Serie generalizada de Fourier*.

Volviendo a la ecuación (5.52), de modo similar tenemos:

$$\int_a^b \phi_j(x) \,.\, \phi_k(x) \,.\, dx \quad \begin{array}{|l} = M_k \quad \text{si} \quad k = j \\ \\ = 0 \quad\; \text{si} \quad k \neq j \end{array}$$

haciendo los reemplazos adecuados al caso presente y teniendo en cuenta el *peso*, x, hallamos la igualdad:

$$\int_0^1 x \,.\, J_n^2(\alpha_j x) \,.\, dx = M_k$$

Obsérvese que M_k es la *Norma* del conjunto ortogonal de funciones. Por su parte, efectuando los reemplazos correspondientes en la ecuación (5.54)

$$\int_a^b f(x) \,.\, \phi_k(x) \,.\, dx = c_k \,.\, M_k \tag{5.54}$$

para la serie de funciones de Bessel tenemos:

$$\int_0^1 f(x) \,.\, x \,.\, J_n(\alpha_j x) \,.\, dx = c_k \,.\, M_k$$

De aquí podemos deducir el valor de los coeficientes:

$$c_k = \frac{1}{M_k} \int_0^1 x \,.\, f(x) \,.\, J_n(\alpha_j x) \,.\, dx$$

5.10 - Funciones de Bessel de segunda clase.

En el apartado 5.2 se vio que cuando ν es un número entero n, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ mantienen una relación de linealidad entre sí, por lo que para resolver la ecuación diferencial respectiva se hacía necesario recurrir a las llamadas Funciones de Bessel de Segunda Clase.

Es decir que cuando ν es un número entero, la solución general de la ecuación de Bessel no puede obtenerse como una suma ponderada de $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$, como hacíamos en el caso contrario[1].

En este apartado trataremos la situación particular mencionada.

Veamos primero el caso en que n = 0. En tal supuesto, la ecuación diferencial de Bessel,

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

se reduce a

$$x y'' + y' + x y = 0$$

La ecuación indicial

$$\gamma(\gamma - 1) c_o + \gamma c_o - n^2 c_o = 0$$

se reduce a su vez a:

$$\gamma^2 - \gamma + \gamma = 0$$

$$\therefore \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Es decir que la ecuación indicial tiene una raíz doble igual a cero. Esto nos obliga a buscar un camino diferente para encontrar la solución.

En el caso general, para que la ecuación (3.6)

$$\gamma = \frac{-(\alpha_o - 1) \pm \sqrt{(\alpha_o - 1)^2 - 4 \beta_o}}{2}$$

tenga una raíz real doble, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad:

$$(\alpha_o - 1)^2 = 4 \beta_o$$

De aquí, se deduce que

$$\gamma = \frac{-(\alpha_o - 1)}{2} = \frac{1 - \alpha_o}{2}$$

Una solución particular de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables puede ser, como hemos visto, de la forma (3.7):

$$y_1(x) = x^\gamma (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$ [2]

La siguiente es asimismo una segunda solución particular de la ecuación

$$y_2(x) = u(x) \, . \, y_1(x) \tag{5.55}$$

---

[1] Por supuesto, esta conclusión no invalida todo lo visto hasta aquí sobre las funciones de Bessel de subíndice n, entero.

[2] Como regla general, descomponer la solución en el producto de una cierta potencia de x, convenientemente elegida, por una serie geométrica en x, facilita grandemente el trabajo posterior

en donde u (x) es una función a determinar[3].

Para obtener la función u (x) debemos calcular las derivadas primera y segunda de $y_2 (x)$:

$$y'_2 (x) = u'(x) . y_1 (x) + u (x) . y'_1 (x) \qquad (5.56)$$

$$y''_2 (x) = u''(x) . y_1 (x) + 2 u' (x) . y'_1 (x) + u (x) . y''_1 (x)$$

Reemplazando estos valores en la ecuación general (3.2), con a = 0,

$$x^2 y'' + \alpha (x) . y' + \beta (x) . y = 0 \qquad (5.57)$$

tenemos:

$$x^2 [u''(x) . y_1 (x) + 2 u' (x) . y'_1 (x) + u (x) . y''_1 (x)] +$$

$$+ \alpha (x) [u'(x) . y_1 (x) + u (x) . y'_1 (x)] + \beta (x) . u (x) . y_1 (x) = 0$$

Reagrupando adecuadamente los términos de esta ecuación,

$$x^2 [u''(x) . y_1 (x) + 2 u' (x) . y'_1 (x)] + \alpha (x) . u'(x) . y_1 (x) +$$

$$+ u (x) [x^2 . y''_1 (x) + \alpha (x) . y'_1 (x) + \beta (x) . y_1 (x)] = 0$$

vemos que la expresión que aparece multiplicando a u (x) es justamente el primer miembro de la (5.57) , por lo que la misma es igual a cero. Al simplificarla, queda solamente:

$$x^2 [u''(x) . y_1 (x) + 2 u' (x) . y'_1 (x)] + \alpha (x) . u'(x) . y_1 (x) = 0$$

Desarrollemos ahora $\alpha (x)$ en serie de potencias

$$\alpha (x) = (\alpha_o x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^4 + \ . . .)$$

y dividamos todo por $x^2 \ y_1$, para obtener en forma explícita las derivadas de u (x):

$$u'' (x) + \left(2 \frac{y'_1}{y_1} + \frac{\alpha_o}{x} + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ . . . \right) u' (x) = 0 \qquad (5.58)$$

Por otro lado, la derivada primera de

$$y_1 (x) = x^\gamma (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ . . .)$$

es: $$y'_1 (x) = \gamma x^{\gamma-1} (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ . . .) + x^\gamma (c_1 + 2 c_2 x + \ . . .)$$

Esta ecuación se puede simplificar unificando las potencias de x dentro y fuera de los paréntesis, asi:

$$y'_1 (x) = \gamma x^{\gamma-1} (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ . . .) + x^{\gamma-1} (c_1 x + 2 c_2 x^2 + \ . . .)$$

Esto nos permite sacar factor común $x^{\gamma-1}$, con lo cual tenemos:

$$y'_1 (x) = x^{\gamma-1} [\gamma (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ . . .) + (c_1 x + 2 c_2 x^2 + \ . . .)]$$

[3] La determinación de la función u (x) requiere un proceso sencillo pero largo. Si se desea obviarlo, sugerimos avanzar a la página 5.41, donde damos una apretada síntesis del mismo.

A continuación vamos a dividir ambos miembros por $y_1(x)$:

$$\frac{y'_1(x)}{y_1(x)} = \frac{x^{\gamma-1}\,[\,\gamma\, c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) + (c_1 x + 2 c_2 x^2 + \ldots)]}{x^{\gamma}\,(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)}$$

Simplificando:

$$\frac{y'_1(x)}{y_1(x)} = \frac{1}{x}\;\frac{\gamma\,(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) + (c_1 x + 2 c_2 x^2 + \ldots)}{(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)}$$

Pero la serie que multiplica a γ en el numerador es igual a la que aparece en el denominador; por lo que, simplificando nuevamente, obtenemos:

$$\frac{y'_1(x)}{y_1(x)} = \frac{\gamma}{x} + \frac{(c_1 x + 2 c_2 x^2 + \ldots)}{x\,(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)} = \frac{\gamma}{x} + \Phi(x)$$

En esta ecuación, el significado de $\Phi(x)$ es obvio. Reemplazando en la (5.58) el resultado anterior, se llega a la igualdad:

$$u'' + \left[\,2\,\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha_o}{x} + \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \ldots + \Phi(x)\,\right] .\ u' = 0$$

Llamando:

$$\Psi(x) = \Phi(x) + \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \ldots +$$

alcanzamos una simplificación aún mayor, que nos permite escribir:

$$u'' + \left[\,2\,\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha_o}{x} + \Psi(x)\,\right] .\ u' = 0 \qquad (5.59)$$

Hemos hallado oportunamente que cuando la ecuación indicial deriva en una raíz doble para la constante γ, el valor de ésta última es:

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_0}{2} \qquad \therefore \qquad 2\gamma + \alpha_0 = 1$$

Reemplazando en la ecuación (5.59):

$$u'' + \left[\,\frac{1}{x} + \Psi(x)\,\right] .\ u' = 0$$

Dividamos ambos miembros por u'. Si pasamos los términos entre paréntesis al segundo miembro, resulta:

$$\frac{u''}{u'} = -\,\frac{1}{x} + \Psi(x)$$

Al llegar aquí, podemos hacer:

$$\frac{u''}{u'} = \frac{d\,u'}{u'}$$

Entonces, integrando, resulta:

$$\ln u' = -\ln x + \int \Psi(x)\,dx$$

Y por tanto:

$$\therefore \qquad u' = \frac{1}{x}\, e^{\int \Psi(x)\,dx}$$

Como $\Psi(x)$ es un polinomio en x, la integral que aparece en el exponente es asimismo un polinomio en x; ello permite desarrollar la exponencial en esta ecuación como una serie de potencias de x.

Si llamamos h_i a los coeficientes de la misma, podemos escribir simbólicamente:

$$u' = \frac{1}{x}\,(1 + h_o x + h_1 x^2 + h_2 x^3 + \ldots) = \frac{1}{x} + h_o + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots$$

Integrando nuevamente, podemos también poner:

$$u = \ln x + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots \tag{5.60}$$

El significado de los coeficientes k_j es también suficientemente explícito:

$$k_1 = h_o, \qquad k_2 = \frac{h_1}{2}\ ; \text{etc.}$$

Recapitulación:

La ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)\,y = 0$$

cuando n es igual a cero se reduce a

$$x y'' + y' + x y = 0$$

La ecuación indicial no nos sirve en este caso para avanzar hacia la solución general. Por tanto, recurriremos a la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables. Una solución particular de la misma es:

$$y_1(x) = x^{\gamma}\,(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$$

O bien $\qquad y_2(x) = u(x)\,.\,y_1(x)$

Donde la función u (x), como se ha visto, es de la forma

$$u = \ln x + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots \tag{5.60}$$

Al reemplazar este valor en la ecuación anterior, obtenemos

$$y_2(x) = y_1(x) \,.\, \ln x + x^{\gamma}(k_1 x + k_2 x^2 + \dots) \,.\, (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

Ahora estamos en condiciones de seguir en busca de la solución $y_2(x)$.

Al efectuar el producto de las dos series entre paréntesis, aparece una nueva serie de potencias en x. Llamando A_m al coeficiente de la potencia emésima, arribaremos a la expresión simbólica siguiente:

$$y_2(x) = y_1(x) \,.\, \ln x + x^{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m$$

Cuando $\gamma = 0$, la ecuación anterior se simplifica así:

$$y_2(x) = y_1(x) \,.\, \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m$$

Aplicaremos ahora este resultado a la solución de la ecuación de Bessel:

$$y_2(x) = J_o(x) \,.\, \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \tag{5.61}$$

Derivando sucesivamente, obtenemos:

$$y'_2(x) = J'_o(x) \,.\, \ln x + \frac{J_o(x)}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}$$

$$y''_2(x) = J''_o(x) \,.\, \ln x + \frac{J'_o(x)}{x} + \frac{x J'_o(x) - J_o(x)}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

$$\therefore \quad y''_2(x) = J''_o(x) \,.\, \ln x + 2\frac{J'_o(x)}{x} - \frac{J_o(x)}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

Como para $n = 0$ la ecuación de Bessel es:

$$x y'' + y' + x y = 0$$

y por su parte, $J_o(x)$ es solución de la misma, reemplazando en la última igualdad las sucesivas derivadas de $y(x)$ hallamos:

$$(x J_o + J'_o + x J''_o) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} + \frac{J_o}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + 2 J'_o - \frac{J_o}{x} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-1} = 0$$

Al ser J_o una solución particular, la suma

$$x\,J_o + J'_o + x\,J''_o$$

es necesariamente nula. Por lo tanto, luego de simplificar y ordenar los términos, resulta:

$$2\,J'_o(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\,x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} m\,A_m\,x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m\,(m-1)\,A_m\,x^{m-1} = 0$$

Como veremos enseguida, nos conviene agrupar las dos últimas sumatorias, que sólo difieren entre sí en el factor multiplicador de cada término; obtenemos:

$$2\,J'_o(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\,x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} (m + m^2 - m)\,A_m\,x^{m-1} = 0$$

Efectivamente, ahora podemos simplificar más y menos m:

$$2\,J'_o(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\,x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2\,A_m\,x^{m-1} = 0 \qquad (5.62)$$

Hemos visto (5.7) que

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,x^{2m}}{2^{2m+\nu}\,m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

Si $\nu = 0$, será:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,x^{2m}}{2^{2m}\,m!\,\Gamma(m+1)}$$

Cuya derivada respecto de x es:

$$J'_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,2m\,x^{2m-1}}{2^{2m}\,m!\,\Gamma(m+1)}$$

Con el objeto de simplificar esta ecuación, le introduciremos previamente ciertas modificaciones. Comenzaremos por recordar que:

$$\Gamma(m+1) = m! = m\,(m-1)!$$

Entonces

$$J'_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,m\,x^{2m-1}}{2^{2m-1}\,m\,(m-1)!\,m!}$$

Ahora sí, simplificaremos "m" en numerador y denominador:

$$J'_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-1}}{2^{2m-1}\,(m-1)!\; m!}$$

Además, como el primer término de la sumatoria, es decir, el que corresponde al subíndice m = 0, es nulo porque en su denominador aparece el factorial de - 1, cuyo valor es infinito, podemos hacer también:

$$J'_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-1}}{2^{2m-1}\,(m-1)!\; m!} \tag{5.63}$$

Al introducir este valor de la derivada en la (5.62), obtenemos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-1}}{2^{2m-2}\,(m-1)!\; m!} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m\, x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2\, A_m\, x^{m-1} = 0 \tag{5.64}$$

Como esta expresión debe tener validez general, cualquiera sea el valor de x, la suma de los términos correspondientes a cada potencia de dicha variable x deberá ser siempre igual a cero. Nótese que como m, sbíndice, es un entero, las potencias de x son todas impares.

Cálculo de los coeficientes A_m:

A partir de la condición mencionada en el párrafo anterior podemos calcular los sucesivos coeficientes A_m, como veremos más abajo. Pero previamente, como para un dado valor de m, los exponentes de x son diferentes en cada sumatoria, para evitar confusiones cambiaremos el nombre de los subíndices, así:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-1}}{2^{2m-2}\,(m-1)!\; m!} + \sum_{h=1}^{\infty} A_h\, x^{h+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, A_k\, x^{k-1} = 0 \tag{5.65}$$

Coeficientes de x^1:

Los coeficientes de la potencia primera de x en cada una de las sumatorias son, respectivamente:

$2m - 1 = 1 \quad \therefore \quad m = 1$

$h + 1 = 1 \quad$ Luego $h = 0$

$k - 1 = 1 \quad$ Luego $k = 2$

Reemplazando estos valores en la (5.62), obtenemos:

$$\frac{-\,x}{2^0\,(0)!\;(1)!} + A_0\, x + 4\,A_2\, x = -x + A_0\, x + 4\,A_2\, x = 0$$

Pero, como las sumatorias en la (5.64) comienzan todas a partir del subíndice m = 1, A_0 es nulo. Entonces

$$4\,A_2 = 1 \quad \therefore \quad A_2 = 1/4 = 0{,}25$$

Coeficientes de x^3:

$$2\,m - 1 = 3 \quad \therefore \quad m = 1$$

$$h + 1 = 3 \quad \therefore \quad h = 2$$

$$k - 1 = 3 \quad \therefore \quad k = 4$$

Reemplazando en la (5.65), obtenemos en este caso:

$$\frac{x^3}{2^2\,(1)!\;(2)!} + A_2\,x^3 + 16\,A_4\,x^3 = (1/8 + 1/4 + 16\,A_4)\,x^3 = 0$$

O sea,

$$16\,A_4 = -1/8 - 1/4 = -3/8 \quad \therefore \quad A_4 = -3/128$$

Coeficientes de x^5:

$$2\,m - 1 = 5 \quad \therefore \quad m = 3$$

$$h + 1 = 5 \quad \therefore \quad h = 4$$

$$k - 1 = 5 \quad \therefore \quad k = 6$$

Reemplazando en la (5.65):

$$\frac{-\,x^5}{2^4\,(2)!\;(3)!} + A_4\,x^5 + 36\,A_6\,x^5 = 0$$

De aquí,

$$36\,A_6 = 1/192 + 3/128 = 4/192 = 1/48 \quad \therefore \quad A_6 = 11/13824, \quad \text{etc.}$$

Observemos que los únicos coeficientes que aparecen son aquellos cuyo índice es par, es decir: A_2, A_4, A_6, A_8, etc.

Reemplazando sus valores en la solución propuesta, $y_2(x)$, ésta última queda así:

$$y_2(x) = J_o(x)\,.\ln x + \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{128}\,x^4 + \frac{11}{13824}\,x^6 - \ldots \tag{5.66}$$

que trataremos de expresar como una sumatoria. Para ello, teniendo en cuenta que, como acabamos de ver, m es siempre par, pondremos

$$m = 2\,r$$

Con lo cual se obtiene para los coeficientes la siguiente fórmula general:

$$A_m = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r}\right)\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}\,(r!)^2}$$

Verificaremos a continuación su validez. En efecto, si m = 2 (Y por tanto, r = 1):

$$A_2 = \frac{(-1)^0}{2^2 (1!)^2} = \frac{1}{4}$$

Si m = 4, r = 2:

$$A_4 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(-1)}{2^4 (2!)^2} = \frac{-3}{2 \cdot 16 \cdot 4} = \frac{-3}{128}$$

Si m = 6, r = 3:

$$A_6 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(-1)^2}{2^6 (3!)^2} = \frac{11}{6 \cdot 64 \cdot 36} = \frac{11}{13824}$$

etc.

Ahora podemos reemplazar el valor de los coeficientes A_m en la (5.66):

$$y_2(x) = J_o(x) \,.\, \ln x + \sum_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right) \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r} (r!)^2} x^{2r}$$

Expresando en forma simbólica la suma que aparece entre paréntesis, esta ecuación se puede expresar también como

$$y_2(x) = J_o(x) \,.\, \ln x + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{r} \left(\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r} (r!)^2} x^{2r}$$

Como $J_o(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente dependientes entre sí, es necesario recurrir a una solución independiente, como por ejemplo:

$$Y_o(x) = \alpha \left[y_2(x) + \beta J_o(x) \right]$$

Se conviene en hacer:

$$\alpha = 2/\pi$$

y $\qquad \beta = \gamma - \ln 2$

siendo γ la llamada Constante de Euler, cuya definición y valor son:

$$\gamma = \lim_{\sigma \to \infty} \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{1}{k} - \ln \sigma = 0{,}5772156 \ldots$$

$\therefore$

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_o(x) \left[\ln x + \gamma - \ln 2\right] + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{r} \frac{1}{p} \right) \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r} (r!)^2} x^{2r} \right\}$$

$$\therefore \qquad Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_o(x)\left[\ln\frac{x}{2} + \gamma\right] + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{r}\frac{1}{p}\right]\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}(r!)^2}\, x^{2r}\right\}$$

Esta ecuación es la que se conoce como Función de Bessel de Segunda Clase, o Función de Neumann, de orden cero.

Otras funciones usuales son: La Función de Bessel de Segunda Clase y orden ν, o Función de Neumann de Orden ν, que se define así:

$$\boxed{Y_\nu(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]}$$

Función de Bessel de 2ª Clase (Función de Neumann)

Y la de orden n:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x)$$

5.11 - Solución general de la Ecuación diferencial de Bessel:

Una solución general de la ecuación de Bessel para cualquier valor de ν, es la siguiente:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes complejas arbitrarias.

Otra solución general está basada en las funciones de Bessel de tercera clase, o funciones de Hankel:

Y

$$\boxed{\begin{aligned} H_{1,\nu}(x) &= J_\nu(x) + i\,Y_\nu(x) \\ H_{2,\nu}(x) &= J_\nu(x) - i\,Y_\nu(x) \end{aligned}}$$

Funciones de Hankel

En este caso, la solución completa es de la forma:

$$y(x) = A \,.\, H_{1,\nu}(x) + B \,.\, H_{2,\nu}(x)$$

en donde A y B son también constantes complejas arbitrarias.

Las funciones de Hankel son de aplicación para resolver problemas de la Física en los cuales aparecen magnitudes en cuadratura.

5.12 - Cuadro Sinóptico.

Ecuación Diferencial de Bessel

Fórmula general	$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$	ν, número real no negativo
Solución particular	$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \, \Gamma(\nu + m + 1)}$	$J_\nu(x)$, función de Bessel de primera clase
Solución general	$y(x) = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x)$ A y B, números complejos arbitrarios	No aplicable cuando ν es un entero
Caso particular: $\nu = n$, , número entero	$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$	
Solución general	$y(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$	$Y_\nu(x)$, Función de Bessel de segunda clase

Funciones de Bessel

Función de Bessel de primera clase	$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \, \Gamma(\nu + m + 1)}$	
Idem, expresión integral n, entero no negativo	$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) \, d\theta$	
Caso particular: $\nu = 0{,}5$	$J_{0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{0,5} \operatorname{sen} x$	$J_{-0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{0,5} \cos x$
Función de Bessel de segunda clase o Función de Neumann	$Y_\nu(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)]$	
Funciones de Hankel	$H_{1,\nu}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$ $H_{2,\nu}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x)$	Utiles cuando en las ecuaciones aparecen términos imaginarios.

El presente capítulo 5, dedicado a la Ecuación diferencial de Bessel y a su solución, no pretende ser exhaustivo en el estudio de las Funciones de Bessel. Todo lo contrario, la multitud de aplicaciones de las mismas como solución de una cantidad de ecuaciones que se presentan en los diferentes dominios de la Física, ha llevado al desarrollo de otras alternativas de una riqueza tal, en cantidad y en propiedades, que excede largamente los propósitos de este tratado, pero que pueden ser consultadas tanto en los textos especializados como también en muchos libros dedicados al Cálculo Superior.

5.13 - Problemas.

Las Ecuaciones de Bessel aceptan en general soluciones comunes, lo que las hace particularmente interesantes para resolver muchos problemas de la Física. Y aunque dichas soluciones pueden parecer difíciles o largas en su aplicación, existen en general tablas que ayudan grandemente a su evaluación. En este apartado veremos primero cómo resolver algunas Ecuaciones de Bessel, y a continuación, cómo transformar ciertas ecuaciones diferenciales en Ecuaciones de Bessel, para de esta forma simplificar el problema de hallar la solución.

5.13.1 - Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 0$

Solución:

Aquí es: $\nu = 0{,}5$ y por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = A\ J_{1/2}(x) + B\ J_{-1/2}(x) = A\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{sen}\, x + B\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x$$

Si hacemos:

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ i \qquad y \qquad B = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ,$$

la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}(\cos x + i\ \text{sen}\, x) = x^{-\frac{1}{2}} . e^{i x}$$

b) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{25}{4}) y = 0$

R: $y(x) = A\ J_{2,5}(x) + B\ J_{-2,5}(x)$

c) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 9) y = 0$

R: $y(x) = A\ J_3(x) + B\ Y_3(x)$

d) $x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$

Solución: En este caso ν es igual a cero: $\nu = 0$

R: $y(x) = J_0(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{64} - \dfrac{x^6}{2304} + \dots$

5.13.2 - Modificar las ecuaciones siguientes para transformarlas en ecuaciones de Bessel, y hallar la solución:

a) $x^2 y'' + 5 x y' + x^2 y = 0$

Solución: Hagamos $y = z \cdot x^{\alpha}$

$\therefore \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} z + z' x^{\alpha} \quad$ e $\quad y'' = \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} z + 2\alpha x^{\alpha-1} z' + x^{\alpha} z''$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$\alpha(\alpha-1) x^{\alpha} z + 2\alpha x^{\alpha+1} z' + x^{\alpha+2} z'' + 5\alpha x^{\alpha} z + 5 z' x^{\alpha+1} + z \cdot x^{\alpha+2} = 0$$

Podemos simlificar x^{α}, que aparece en todos los sumandos:

$$\alpha(\alpha-1) z + 2\alpha x z' + x^2 z'' + 5\alpha z + 5 z' x + z \cdot x^2 = 0$$

A continuación ordenaremos esta ecuación:

$$x^2 z'' + (2\alpha + 5) x z' + [\alpha(\alpha-1) + 5\alpha + x^2] z = 0$$

De aquí: $2\alpha + 5 = 1 \quad \therefore \quad \alpha = -2$

Y también: $\alpha(\alpha-1) + 5\alpha = -4$

De donde, reemplazando, obtenemos:

$$x^2 z'' + x z' + (x^2 - 4) z = 0$$

Que es una ecuación de Bessel, en z, y en la cual, n es igual a 2. La solución es:

$$z(x) = A\ J_2(x) + B\ Y_2(x)$$

Finalmente, como $y = z \cdot x^{\alpha}$, la solución general, expresada como función de y, es:

$$y(x) = A\ x^{\alpha} J_2(x) + B\ x^{\alpha} Y_2(x)$$

Donde A y B son dos constantes complejas arbitrarias.

b) $x^2 y'' + 6 x y' + x^2 y = 0$

c) $x^2 y'' + \dfrac{3}{2} x y' + x^2 y = 0$

5.13.3 - Resolver las ecuaciones siguientes transformándolas previamente en ecuaciones de Bessel:

a) $x^2 y'' + x y' + m^2 (x^2 - \alpha^2) y = 0$

Hagamos el reemplazo:

$$t = m x$$

Ahora, y (x) es una función de t: $y (x) = y (m^{-1} t)$.

Las derivadas de y respecto de t son:

$$\frac{d y}{d t} = \frac{d y}{d x} \cdot \frac{d x}{d t} = m^{-1} . y ' (x)$$

y $$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d y '}{d x} \cdot \frac{d x}{d t} = m^{-2} . y '' (x)$$

Reemplazamos ahora x, y '(x) e y " (x) en la ecuación original, con lo cual esta queda expresada como una función de t:

$$\frac{m^2}{m^2} t^2 y'' + \frac{m}{m} t y' + (t^2 - \alpha^2 m^2) y = t^2 \frac{d^2 y}{d t^2} + t \frac{d y}{d t} + (t^2 - \nu^2) y = 0$$

Hemos obtenido así una ecuación de Bessel, en la cual la variable es t, y el valor de ν:

$$\nu = \alpha m$$

La solución general es, por lo tanto:

$$y (t) = A J_\nu (t) + B Y_\nu (t)$$

b) $x^2 y'' + 5 x y' + 2 x^2 y = 0$

El reemplazo adecuado en este caso es: $y = z x^\alpha$

Con esta sustitución, la ecuación diferencial resulta (Ver problema 5.2 a):

$$x^2 z'' + (2 \alpha + 5) x z ' + [\alpha (\alpha - 1) + 5 \alpha + 2 x^2] z = 0$$

De aquí: $2 \alpha + 5 = 1 \quad \therefore \quad \alpha = -2$

Reemplazando en la última ecuación, tenemos:

$$x^2 z'' + x z ' + 2 (x^2 - 2) z = 0$$

Esta última ecuación es similar a la del problema 5.3 a, y por tanto se resuelve de manera idéntica a aquella.

c) $x\,y'' + m\,y' + n\,y = 0$

Esta ecuación aunque diferente de la ecuación diferencial de Bessel, para ciertos valores de m y n acepta como solución a la función de Bessel de orden cero:

$$y(t) = J_0(t)$$

En efecto, hagamos el reemplazo: $x = t^2$. Como

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64} - \frac{t^6}{2304} + \ldots$$

entonces

$$y(x) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} - \frac{x^3}{2304} + \ldots$$

Derivando:

$$\therefore \quad y'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{32} - \frac{x^2}{768} + \ldots$$

También

$$x \,.\, y''(x) = \frac{x}{32} - \frac{x^2}{384} + \ldots$$

Reemplazando en la ecuación original podemos arribar a las siguientes conclusiones: Para que el término independiente sea nulo, deberían ser m = 4 o bien, n = 1/4.

Para que los términos en x se anulen, deberían ser: m = 1 *y* n = 1/4. Estos últimos valores anulan también el término en x^2 y sucesivos. En definitiva, la ecuación dada, en la que

$$m = 1 \quad y \quad n = \frac{1}{4}$$

tiene como solución

$$y(t) = J_0(t) \quad \text{donde} \quad t = \sqrt{x}$$

Problemas resueltos con Matlab:

- *Calcular el valor de la función de Bessel de primera clase y orden 2, para x = 3. Comparar el resultado con la suma de los cuatro primeros términos de la serie:*

  » % *Utilizaremos la función Matlab: BESSELJ (Nu, x):*
  » BESSELJ(2, 3)
  ans = 0.4861

A partir de los primeros cuatro términos de la serie:

$$J_2(3) = 3^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m}}{2^{2m+2} \; m! \; (m+2)!}$$

$$J_2(3) = \frac{3^2}{2^4 \; 2!} - \frac{3^2 \,.\, 3^2}{2^4 \, 3!} + \frac{3^2 \,.\, 3^4}{2^6 \; 2! \; 4!} - \frac{3^2 \,.\, 3^6}{2^8 \; 3! \; 5!} = 0{,}4836$$

- *Calcular el valor de la función $J_{0,3}(x)$ para los primeros valores enteros de x. Hallar por aproximaciones sucesivas los primeros cuatro ceros, y determinar la separación entre ellos.*

» BESSELJ (0.3, 1)	Ubicación ceros:	Distancia entre ceros
ans = 0.7402		
» BESSELJ (0.3, 2)		
ans = 0.4257		
» BESSELJ (0.3, 3)	» BESSELJ (0.3, 2.855)	
ans = -0.0673	ans = -4.2812e-004	
» BESSELJ (0.3, 4)		
ans = - 0.3638		3,127
» BESSELJ (0.3, 5)		
ans = -0.2968		
» BESSELJ (0.3, 6)	» BESSELJ (0.3, 5.982)	
ans = 0.0058	ans = -7.2278e-005	
» BESSELJ (0.3, 7)		
ans = 0.2567		3,137
» BESSELJ (0.3, 8)		
ans = 0.2538		
» BESSELJ (0.3, 9)	» BESSELJ (0.3, 9.119)	
ans = 0.0317	ans = 8.9611e-005	
» BESSELJ (0.3, 10)		
ans = - 0.1946		3,140
» BESSELJ (0.3, 11)		
ans = - 0.2289		
» BESSELJ (0.3, 12)	» BESSELJ (0.3, 12.259)	
ans = -0.0589	ans = 6.4857e-005	
» BESSELJ (0.3, 13)		
ans = 0.1495		

- *Utilizando exclusivamente Matlab, verificar, para $x = \pi/2$, el cumplimiento de la fórmula:*

$$J_{0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{0,5} \text{sen } x$$

$$J_{0,5}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{0,5} \text{sen } \frac{\pi}{2}$$

```
» BESSELJ (0.5, pi/2)
ans  =  0.6366
```

Verificación en el segundo miembro de la igualdad:

```
» a = (pi) ^ 2
a  =  9.8696
» b =  4 / a
b  =  0,4053
» J =  b ^ 0.5           % Recordar que sen π / 2 =  1
J  =  0.6366
```

- *Repetir el problema anterior, siendo $x = \pi/3$, para verificar la fórmula:*

$$J_{-0,5}(x) = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{0,5} \cos x$$

```
» BESSELJ (-0.5, pi/3)
ans  =  0.3898
```

Verificación:

```
» x  =  (pi) ^ 3
x  =  1.0472
» y  =  cos (x)
y  =  0.5000
» a  =  2*3/(pi ^ 2)
a  =  0.6079
» b = a ^ 0,5
b =  0.7097
» J = b*y
J  =  0.3898
```

- *Calcular la función de Bessel de segunda clase y orden cero, para $x = \pi$:*

```
» BESSELY (0, pi)
ans  =  0.3284
```

- *Construcción de tablas de funciones de Bessel. Ejemplos:*

```
» NU  =  [0]
NU =     0
» X =  [0  0.2  0.4  0.6  0.8  1]
X =     0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000
» BESSELJ(NU, X)
ans =   1.0000    0.9900    0.9604    0.9120    0.8463    0.7652
```

De otra forma:

```
» BESSELJ (0, (0 : .2 : 1))
ans =  1.0000    0.9900    0.9604    0.9120    0.8463    0.7652
```

- *Construímos ahora una tabla idénticapero para otros valores de* ν:

```
» BESSELJ (1, (0 : .2 : 1))
ans  =     0     0.0995     0.1960     0.2867     0.3688     0.4401
»
» % Tabla de Funciones Bessel para ν = 2
»
» BESSELJ (2, (0 : .1 : 1))
ans =
  Columns 1 through 7
        0    0.0012    0.0050    0.0112    0.0197    0.0306    0.0437
  Columns 8 through 11
   0.0588    0.0758    0.0946    0.1149
```

- *Observemos también la forma siguiente:*

```
» BESSELJ (1, (0 : .2 : 1) ' )
ans =        0
           0.0995
           0.1960
           0.2867
           0.3688
           0.4401
```

Nótese que en este caso, a la inversa de los ejemplos anteriores, los valores para ν constante aparecen en las columnas. La modificación se debe al agregado del apóstrofe entre los dos paréntesis de cierre.

La utilidad del cambio la veremos en el ejemplo siguiente, que permite construir una tabla (O matriz) bidimensional:

- *Construcción de la tabla de valores para la función de Bessel de primera clase, para:*

Rango de la variable v: De 0 a 0,5, en pasos de 0,1.
Rango de la variable x: De 0 a 1, en pasos de 0,2.

```
» BESSELJ (0 : .1 : .5, (0 : .2 : 1)')
ans =
    1.0000         0         0         0         0         0
    0.9900    0.8274    0.6815    0.5542    0.4455    0.3545
    0.9604    0.8626    0.7633    0.6666    0.5753    0.4913
    0.9120    0.8573    0.7932    0.7237    0.6524    0.5816
    0.8463    0.8248    0.7902    0.7458    0.6949    0.6399
    0.7652    0.7708    0.7615    0.7402    0.7094    0.6714
```

- *Construcción de la tabla de valores para la función de Bessel de primera clase, para:*

Rango de la variable v: De 0 a 5, en pasos de 1.
Rango de la variable x: De 0 a 2π, en pasos de $\pi/3$.

```
» BESSELJ (0 : 1 : 5, (0 : pi/3: 2*pi)')
ans =
    1.0000         0         0         0         0         0
    0.7441    0.4550    0.1250    0.0223    0.0030    0.0003
    0.1698    0.5689    0.3734    0.1443    0.0401    0.0087
   -0.3042    0.2846    0.4854    0.3335    0.1514    0.0521
   -0.3781   -0.1348    0.3137    0.4344    0.3085    0.1547
   -0.0979   -0.3446   -0.0337    0.3188    0.3991    0.2909
    0.2203   -0.2124   -0.2879    0.0291    0.3157    0.3728
```

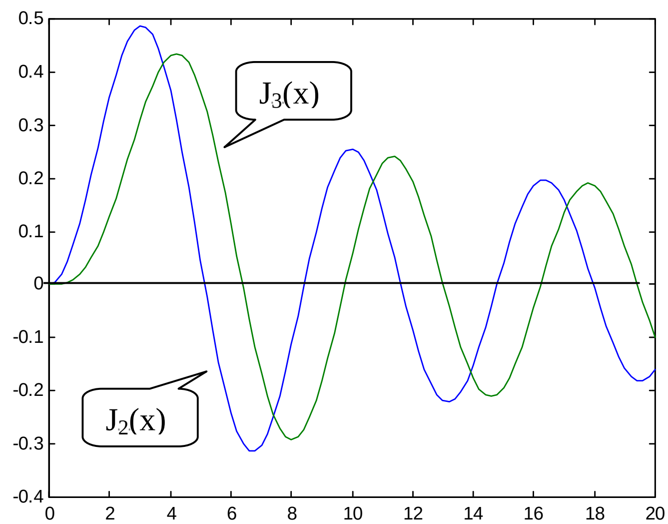
- *Construcción de la tabla de valores para la función de Bessel de segunda clase, para:*

Rango de la variable v: De 0 a 0,5, en pasos de 0,1.
Rango de la variable x: De 0 a 1, en pasos de 0,2.

```
» BESSELY (0 : 1 : 5, (0 : pi/3: 2*pi)')
ans =
      -Inf      -Inf      -Inf      -Inf      -Inf      -Inf
    0.1242   -0.7411   -1.5396   -5.1396  -27.9080 -208.0617
    0.5180   -0.0547   -0.5703   -1.0344   -2.3930   -8.1063
    0.3284    0.3589   -0.0999   -0.4861   -0.8284   -1.6235
   -0.0896    0.3700    0.2663   -0.1157   -0.4321   -0.7095
   -0.3339    0.0667    0.3594    0.2078   -0.1212   -0.3930
   -0.2291   -0.2391    0.1530    0.3365    0.1683   -0.1222
```

- *Alternancia de los ceros de las funciones de Bessel de índice consecutivo:*

```
» % Comprobar en forma gráfica la alternancia entre los ceros
» % de las funciones J3(x) y J2(x)
»
» % Rango de x: De 0 a 20 en pasos de 0.2:
» J2x = besselj(2,(0:0.2:20));
» J3x = besselj(3,(0:0.2:20));
» x = [0 : 0.2 : 20];
» plot(x,J2x,x,J3x)
```



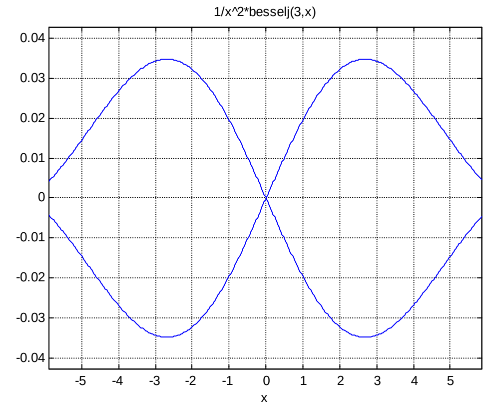
- *Propiedades de las funciones de Besssel:*

```
» % Verificar la propiedad J-n(x) = (-1) ^ n*Jn(x).
» % Si n es par, entonces: J-n(x) = Jn(x). Sea por ejemplo n = 2:
» syms  x
» J_2x = besselj(-2,x)
J_2x =  besselj(2,x)
»
» % Por el contrario, si n es impar:
» J_3x = besselJ (-3,x)
J_3x =  - besselj(3,x)
```

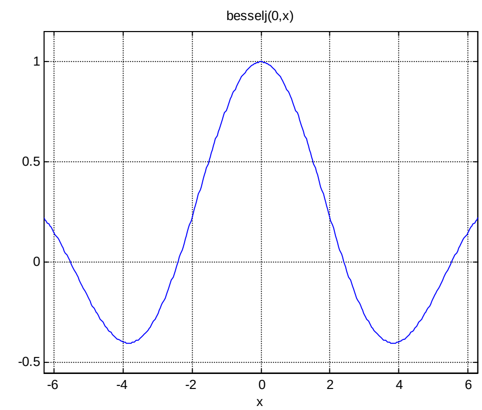
- *Verificar con la ayuda de su representación gráfica, la fórmula: d/dx (1/x^n*Jn(x) = - 1/x^n*Jn+1(x):*

```
» syms  x
» % Sea por ejemplo n = 2
» x ^ (-2)*besselj(2,x)
ans = 1/x ^ 2*besselj(2,x)
» F1 = diff (1/x ^ 2*besselj(2,x))
F1= - 2/x ^ 3*besselj(2,x)+1/x ^ 2*(besselj(1,x) -2/x*besselj(2,x))
» F2 = 1/x ^ 2*besselj(3,x)
F2 = 1/x ^ 2*besselj(3,x)
```

» % Si representamos ambas funciones, verificamos que las mismas son iguales y opuestas:
» ezplot (F1)
» hold on
» ezplot (F2)
» grid



- *Raíces de Jo(x): Con ayuda de la gráfica de la función, hallar por aproximaciones sucesivas las dos primeras raíces y calcular la separación entre ellas:*




```
» % Empecemos  por representar la función
» syms x
» J0 = besselj(0,x);
» ezplot (J0)
» % En el gráfico vemos que las raíces caen en
» % x1 = 2,4   y   x2 = 5,5  aproximadamente.
» besselj(0,(5.52 : 0.001 : 5.525))
ans =
   -0.0000    0.0003    0.0007    0.0010    0.0013
» % Una raíz cae en x = 5,52. La otra en:
» besselj(0,(2.40 : 0.001 : 2.405))
ans =
    0.0025    0.0020    0.0015    0.0009    0.0004   -0.0001
» % Es decir, en 2.405 aprox.  La diferencia entre ambas es:
» % Distancia entre ceros:
» 5.52 - 2.405
ans =     3.1150
» % Vemos nuevamente que la diferencia entre raíces es una cantidad próxima a pi.
```

- *Resolver la ecuación del problema 5.13.1.a*

```
» syms   y  t
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+t*Dy+(t ^ 2-.25)*y = 0')
Y =  (C1*sin(t)+C2*cos(t))/t ^ (1/2)
» % Observar que esta ecuación coincide con la solución del problema,
» % con la condición de asignar a C1 y C2 los valores adecuados.
```

- *Solución de ecuaciones de Bessel o transformables Bessel:*

```
» % Resolver la ecuación de Bessel:  y '' *x ^ 2 + y ' *x + (x ^ 2 - n ^ 2)*y = 0
» % Ejemplo 1: n = 0
»
» syms y t
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+t*Dy+t ^ 2*y=0')
Y =  C1*besselj(0,t)+C2*bessely(0,t)
»
» % Ejemplo 2: n = 2
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+t*Dy+(t ^ 2-4)*y=0')
Y = C1*besselj(2,t)+C2*bessely(2,t)
»
» % Ejemplo 3: n = 5
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+t*Dy+(t ^ 2-25)*y=0')
Y = C1*besselj(5,t)+C2*bessely(5,t)
» % etc.


» syms y t
»
» % Resolver la ecuación y '' *x ^ 2 + 6*y ' *x + x ^ 2 *y = 0
»
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+6*t*Dy+t ^ 2*y=0')
Y = (C1*cos(t)*t^2-3*C1*cos(t)-3*C1*sin(t)*t+C2*sin(t)*t^2-3*C2*sin(t) +3*C2*cos(t)*t)/t^5
»
»
» % Resolver la ecuación y '' *x + y ' + x ^ 2 * y/4 = 0
» Y = dsolve('t*D2y + Dy + t ^ 2*y/4 = 0')
Y = C1*bessely(0,1/3*t ^ (3/2))+C2*besselj(0,1/3*t ^ (3/2))
»
»
» % Resolver la ecuación y '' *x ^ 2 + 3/2*y ' *x + x ^ 2 *y = 0
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+3/2*t*Dy+t ^ 2*y=0')
Y = (C1*besselj(1/4,t)+C2*bessely(1/4,t))/t ^ (1/4)
»
»
» % Resolver la ecuación: y '' * x ^ 2 + 6*y ' * x + x ^ 2 * y = 0
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+5*t*Dy+2*t ^ 2*y=0')
Y =  (C1*besselj(2,2 ^ (1/2)*t)+C2*bessely(2,2 ^ (1/2)*t))/t ^ 2
»
```

- *Verificación de la solución(Gráfico):*

```
» syms y t
» Y = dsolve('t ^ 2*D2y+t*Dy+t ^ 2*y=0')

Y = C1*besselj(0,t)+C2*bessely(0,t)
»
» % Hagamos C1 = 1  y  C2 = 1:
» y = besselj(0,t)+bessely(0,t)
y = besselj(0,t)+bessely(0,t)
»
» d1 = diff(y,t)
d1 = -besselj(1,t)-bessely(1,t)
» d2 = diff(d1,t)
d2 = -besselj(0,t)+1/t*besselj(1,t)-bessely(0,t)+1/t*bessely(1,t)
»
» F = t ^ 2*d2+t*d1+t ^ 2*y
F =  t ^ 2*(-besselj(0,t)+1/t*besselj(1,t)-bessely(0,t)+1/t*bessely(1,t))+
  + t*(-besselj(1,t)-bessely(1,t))+t ^ 2*(besselj(0,t)+bessely(0,t))
» ezplot(F)
» axis([0 6  –.1 .1])
```