Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Primera Parte

Funciones Eulerianas

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina

2006

A modo de Presentación

Las últimas décadas del siglo pasado han sido testigo de la digitalización de los equipos y sistemas electrónicos, favorecida por un conjunto de avances tecnológicos como la Informática, y la Microelectrónica y los desarrollos relacionados con ellas. Esto ha traído como consecuencia la necesidad de introducir una profunda transformación de la enseñanza de la Electrónica, que ha dejado de ser una disciplina dedicada al estudio de fenómenos fundamentalmente analógicos.

En efecto, la necesidad de conocer los procesos de digitalización y transformación de equipos, redes y sistemas, su diseño, desarrollo y funcionamiento, han obligado a analizar los programas de prácticamente la totalidad de las asignaturas de la Carrera, reformularlos en función de la realidad tecnológica actual, y en muchos casos, incorporar nuevas materias en la especialidad. Tarea ésta que creemos inoportuno dar por finalizada. En efecto, nuevos avances nos siguen asombrando a diario, produciendo una evolución, o quizás sea mejor decir una revolución que está lejos de ser completada.

En este ámbito de transformación profunda y continuada, los responsables de la enseñanza de la Ingeniería Electrónica no podemos menos que preguntarnos qué de lo que estamos enseñando sigue teniendo vigencia, y hasta cuando, y qué nuevos temas debemos incorporar cada vez.

Tal es el caso de quienes estamos dedicados a enseñar los fundamentos matemáticos de los procesos físicos relacionados con la Electrónica y las Telecomunicaciones. Así, a comienzos de los 90 nos vimos obligados a introducir en los programas de las materias afines los conceptos de las funciones de variable discreta y de los sistemas digitales que las producen y manejan.

En tal contexto, el ya exigente programa del tercer curso de Análisis Matemático incorporó dichos conceptos, pasando desde entonces a denominarse Análisis de Señales y Sistemas.

Prudentemente, no se tocaron los contenidos de los programas anteriores, hasta tanto no se compruebe que alguno de ellos pueda ser considerado prescindible. La consecuencia de lo dicho es que los profesores de la asignatura nos vemos constreñidos a reducir la profundidad con que anteriormente se veían algunos temas que hoy aparentan no tener la misma importancia que antaño.

El trabajo que exponemos ahora ha sido concebido como la última parte de un voluminoso texto en preparación, que pretende abarcar todos los temas del Análisis III tradicional, con la incorporación de los items referidos a las señales y sistemas de variable discreta.

Esta última parte describe, como su título lo indica, las Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior, expuestas de manera accesible a un estudiante de Ingeniería, e incorpora numerosos problemas, algunos de ellos resueltos y otros no, estos últimos al efecto de servir de ayuda a los educadores al momento de preparar temas para interrogatorios, clases prácticas y exámenes.

Se han incorporado asimismo problemas tipo resueltos por aplicación del programa informático Matlab, formidable herramienta con la que contamos hoy educandos y profesionales.

Una razón adicional para presentar aquí estos temas y los que iremos publicando próximamente es que, por tratarse de los últimos puntos del ambicioso Programa del curso de Análisis de Señales y Sistemas, no siempre se cuenta con el tiempo necesario para estudiarlos en profundidad. Sin embargo, dado que ciertos contenidos como las funciones de Bessel, los Polinomios de Legendre, o las funciones de Chebyshev son importantes para el estudio de los filtros eléctricos, las guías de onda y otros componentes de los sistemas electrónicos y de telecomunicaciones, pueden incluso ser útiles a profesores de las materias que incluyen los contenidos mencionados.

El autor.

1. Integrales Eulerianas.

1.1 - Integral Euleriana de Segunda Especie. La Función Gamma:

Se conoce como Integral de Euler de Segunda Especie[1], o Función Gamma, a la siguiente:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \tag{1.1}$$

donde n es un número arbitrario, y t la variable de integración.

La funcion Γ permite extender el concepto de *producto factorial*, o simplemente *factorial*, a números que trascienden del conjunto de los naturales, proporcionando al mismo tiempo las herramientas para efectuar su cálculo.

Como punto de partida calcularemos la función Gamma del número 1:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = - e^{-t}\Big|_0^{\infty} = - e^{-\infty} + 1 = 1 \tag{1.2}$$

Es posible establecer, como veremos a continuación, una fórmula de recurrencia que permite calcular la función $\Gamma(n+1)$ a partir del conocimiento de $\Gamma(n)$. En efecto, reemplazando el número n por $n + 1$ en la (1.1), podemos escribir:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^{n}\, e^{-t}\, dt$$

Esta integral se resuelve por el método de integración por partes, es decir, aplicando la fórmula:

$$\int u\, dv = u \,.\, v - \int v\, du$$

A dicho fin, llamemos:

$$u = t^{n} \quad \therefore \quad du = n\, t^{n-1}\, dt$$

y

$$dv = e^{-t} dt \quad \therefore \quad v = - e^{-t}$$

Entonces

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^{n} e^{-t} dt = - t^{n}\, e^{-t}\Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt = 0 + n\,\Gamma(n)$$

Si aplicamos este resultado en forma reiterada a partir de (1.2), estaremos en condiciones de calcular el valor de $\Gamma(n)$ para cualquier número natural n:

[1] La Integral de Euler de Primera Especie, también llamada Función Beta, se verá en el apartado 1.7.

En efecto:

$$\Gamma(2) = 1 \,.\, \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \,.\, \Gamma(2) = 2 \,.\, 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \,.\, \Gamma(3) = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6 = 3!$$

. . .

$$\Gamma(n) = (n-1) \,.\, \Gamma(n-1) = (n-1) \,.\, \ldots \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n \,.\, \Gamma(n) = n \,.\, (n-1) \,.\, \ldots \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!$$

. . .

1.2 - Extension del concepto de Función Factorial a los números reales no naturales:

La función Gamma, como el factorial de un número, son en última instancia el producto de sucesiones de números. Sin embargo, solamente son comparables entre sí cuando se trata del factorial de un número entero positivo. Véase al respecto el apartado 1.17, al final del Capítulo.

Ejemplo: Si por algún procedimiento adecuado podemos llegar a determinar la función $\Gamma(1{,}5)$, también podremos calcular en forma directa, las sucesivas funciones gamma cuyo argumento difiere del de la anterior en una unidad:

$$\Gamma(2{,}5) = 1{,}5 \,.\, \Gamma(1{,}5)$$

$$\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \,.\, \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \,.\, 1{,}5 \,.\, \Gamma(1{,}5)$$

etc., y también:

$$\Gamma(0{,}5) = -0{,}5 \,.\, \Gamma(-0{,}5)$$

Veremos, a tìtulo de ejemplo, el cálculo de la función $\Gamma(0{,}5)$. Aplicando la definición:

$$\Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty t^{-0{,}5} e^{-t} \, dt$$

Introduzcamos el cambio de variables:

$$t = x^2 \qquad \therefore \qquad dt = 2x \, dx$$

$$\therefore \qquad \Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty x^{-1} e^{-x^2} \, 2x \, dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$$

A continuación, elevemos ambos miembros de esta igualdad al cuadrado. Obtendremos

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right) . \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right)$$

Como el resultado de la integral definida es independiente de la variable de integración utilizada, podemos cambiar el nombre de la misma en la segunda integral, con lo que obtenemos:

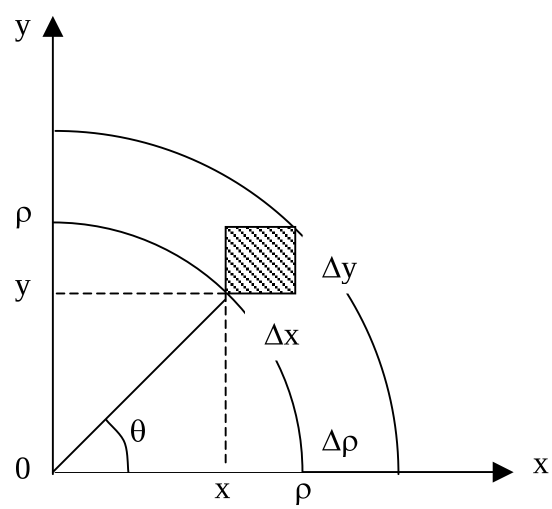
$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \;.\; \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy =$$

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \left(\lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-x^2}\, dx \;.\; \lim_{y \to \infty} \int_0^y e^{-y^2}\, dy \right)$$

Esto permite agrupar ambas integrales, así:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \int_0^x \int_0^y e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy \qquad (1.3)$$

Trataremos ahora de trasladar esta integral doble a un sistema de coordenadas polares. En la figura siguiente, consideremos un punto de coordenadas cartesianas x e y. Llamemos ρ a la distancia del punto al origen de coordenadas. Evidentemente, las coordenadas polares de dicho punto son ρ y θ.



Notemos que la integral doble o integral de superficie (1.3) está circunscripta a la región del plano delimitada por las rectas

$0 \le x \le \infty$ y $0 \le y \le \infty$

es decir, al primer cuadrante. Por lo tanto, en coordenadas polares, los límites de integración son, respectivamente,

Para ρ, 0 e ∞

y para θ, 0 y $\pi/2$

En el gráfico anterior se advierte que si introducimos un incremento $\Delta\rho$ del radio ρ, el producto de los incrementos correspondientes Δx y Δy , sobre los ejes x e y respectivamente, es igual al area A del rectangulo rayado. En efecto:

$$A = \Delta x \ . \ \Delta y$$

En el lìmite, si consideramos un incremento diferencial $d\rho$, el area elemental del rectángulo correspondiente es precisamente el producto de las diferenciales en x e y:

$$dA = d\,x \ . \ dy$$

Pasaremos ahora a expresar la integral doble en coordenadas polares. Ya vimos cómo se modifican los límites de integración. Por su parte, las variable "x" e "y" pasarán a ser, respectivamente:

$$x = \rho \cos \theta$$

e

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

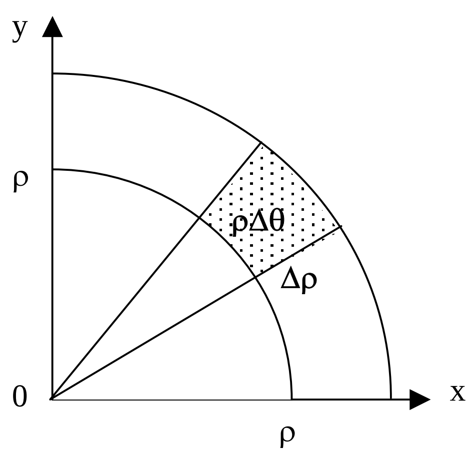
Y por tanto,

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho^2$$

El incremento $\Delta\rho$ en el radio ρ implica que el rectángulo elemental se ha transformado en un trapecio curvilineo limitado por las prolongaciones de los radios y por dos arcos elementales, cuya longitud $\Delta\lambda$ promedio es igual al radio por la longitud del arco, es decir:

$$\Delta\lambda = \rho \, \Delta\theta$$

como puede verse en la figura siguiente:



El area del trapecio elemental es ahora

$$dA = \rho \ . \ d\theta \ . \ d\rho \qquad (1.4)$$

Reemplazando en la (1.3) los valores obtenidos hasta aquí, obtenemos la función Γ expresada en coordenadas polares:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho\, d\theta\, d\rho = 4 \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \qquad (1.5)$$

Si llamamos

$$u = -\frac{1}{2}\, e^{-\rho^2}$$

la diferencial correspondiente es:

$$du = \rho\, e^{-\rho^2}\, d\rho$$

Al introducir este resultado en la ecuación (1.5), la misma se puede calcular en forma directa procediendo así:

$$\Gamma^2(0{,}5) = 4 \int_0^{\infty} du \int_0^{\pi/2} d\theta = -4 \int_0^{\infty} d\left(\frac{1}{2}\, e^{-\rho^2}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta$$

Efectuando operaciones:

$$\Gamma^2(0{,}5) = -2\, e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty} .\ \theta\Big|_0^{\pi/2} = 2\,\pi/2 = \pi$$

Es decir:

$$\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$$

A partir de tal conclusión, podemos definir los valores de la función gamma para todos los números fraccionarios que difieren de 0,5 en un número entero cualquiera. Por ejemplo:

$$\Gamma(1{,}5) = 0{,}5 \,.\, \Gamma(0{,}5) = 0{,}5 \,.\, \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2{,}5) = 1{,}5 \,.\, \Gamma(1{,}5) = 1{,}5 \,.\, 0{,}5 \,.\, \sqrt{\pi} = 0{,}75 \sqrt{\pi} \qquad (1.6)$$

Etc.

En caso de la función gamma de números fraccionarios negativos, es posible calcular su valor a partir de la expresión

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

Ejemplos:

$$\Gamma(-0{,}5) = \frac{\Gamma(0{,}5)}{-0{,}5} = -2 \,.\, \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1{,}5) = \frac{\Gamma(-0{,}5)}{-1{,}5} = -2 \,.\, \left(-\frac{2}{3}\right) \sqrt{\pi}$$

Etc.

Existen tablas calculadas para otros valores entre 0 y 1. A partir de las mismas se puede obtener el valor de Γ para cualquier valor fraccionario que difiera de aquellos en una unidad o un número entero de unidades, como hemos hecho hasta aquí. Lo que equivale a decir que es posible calcular Γ para cualquier número real, con excepción de cero y de los números enteros negativos, para los cuales no existe la función gamma, como se verá en la sección 1.4.

1.3 - Integral de Gauss:

De acuerdo con la definición de $\Gamma(n)$, es:

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2}\, e^{-t}\, dt$$

Si hacemos ahora el cambio de variable:

$$t = u^2 \qquad \therefore \qquad dt = 2\,u\,du$$

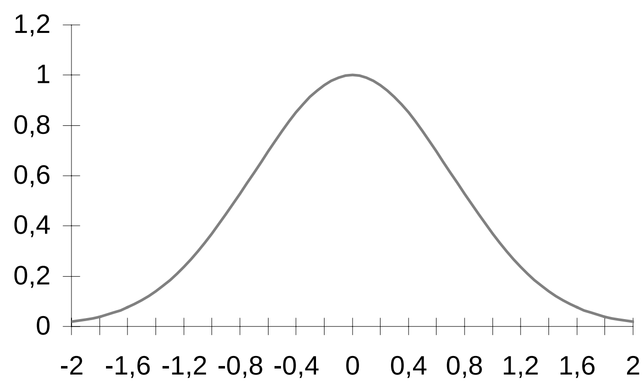
y reemplazamos en la integral anterior, tendremos:

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{-1} \,.\, e^{-u^2} \,.\, 2\;u\;.\,du = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

De aquí deducimos el valor de la siguiente integral, que se conoce como Integral de Gauss:

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Esta función, cuya representación se ve aquí abajo, es de aplicación en la teoría de probabilidades:



1.4 - Función Γ de cero y de los números enteros negativos:

Aplicando aquí también la fórmula

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

para el cálculo de la función Γ (0), encontramos que la misma no existe, pues implica una división por cero. Igualmente, por reiteración, podemos verificar que tampoco existe la función Gamma de cualquier número entero negativo.

$$\Gamma(1) = \frac{\Gamma(2)}{1} = 1 = 0!$$

$$\therefore \qquad \Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$$

Reiterando:

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = +\infty$$

etc.

En general, si n es un número entero positivo, entonces

$$\Gamma(-n) = \pm\infty$$

Ya hemos visto que, por el contrario, la función Gamma sí existe para números negativos fraccionarios.

Podemos extraer como conclusión que la funcion gamma es continua para todo n excepto en los puntos (Polos de la función):

$$n = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \text{etc}$$

Lo que se puede demostrar también en forma rigurosa. Véase al respecto el apartado siguiente.

1.5 - Generalización de la Función Γ:

En primer lugar, veamos cómo es posible calcular una tabla de la función Gamma utilizando para ello el programa Matlab.

La tabla siguiente muestra la Tabla para los números reales positivos comprendidos entre 0 y 1, tomados cada dos centésimas. Pero el método es extensible a cualquier otro caso.

```
» % Construcción de una tabla de la función Gamma, entre 0 y 1:
» x = [ 0 : .02 : 1];
y = [ x; gamma (x) ]
y =
  Columns 1 through 7
       0    0.0200    0.0400    0.0600    0.0800    0.1000    0.1200
     Inf   49.4422   24.4610   16.1457   11.9966    9.5135    7.8633

  Columns 8 through 14
   0.1400    0.1600    0.1800    0.2000    0.2200    0.2400    0.2600
   6.6887    5.8113    5.1318    4.5908    4.1505    3.7855    3.4785

  Columns 15 through 21
   0.2800    0.3000    0.3200    0.3400    0.3600    0.3800    0.4000
   3.2169    2.9916    2.7958    2.6242    2.4727    2.3383    2.2182

  Columns 22 through 28
   0.4200    0.4400    0.4600    0.4800    0.5000    0.5200    0.5400
   2.1104    2.0132    1.9252    1.8453    1.7725    1.7058    1.6448

  Columns 29 through 35
   0.5600    0.5800    0.6000    0.6200    0.6400    0.6600    0.6800
   1.5886    1.5369    1.4892    1.4450    1.4041    1.3662    1.3309

  Columns 36 through 42
   0.7000    0.7200    0.7400    0.7600    0.7800    0.8000    0.8200
   1.2981    1.2675    1.2390    1.2123    1.1875    1.1642    1.1425

  Columns 43 through 49
   0.8400    0.8600    0.8800    0.9000    0.9200    0.9400    0.9600
   1.1222    1.1031    1.0853    1.0686    1.0530    1.0384    1.0247

  Columns 50 through 51
   0.9800    1.0000
   1.0119    1.0000
```

A continuación desarrollaremos también una fórmula que permite calcular $\Gamma(\alpha)$, siendo α un número cualquiera. Para ello partiremos de la igualdad:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + n + 1) &= (\alpha + n)! = (n + \alpha)! \\ &= 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n . (n + 1) . (n + 2) \ldots (n + \alpha) \\ &= n! . (n + 1) . (n + 2) . (n + 3) \ldots (n + \alpha)\end{aligned}$$

El límite, para n tendiendo a infinito, de esta expresión es:

$$\lim_{n \to \infty} \Gamma(\alpha + n + 1) = n! . \overbrace{n . n . n \ldots n}^{\alpha} = n! . n^{\alpha} \qquad (1.7)$$

Por otra parte: $\alpha\, \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$
despejando,

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} = \ldots$$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots\ (\alpha+n)}$$

En primer lugar, esta expresión confirma lo dicho en el apartado anterior: El producto factorial de cero o de un número entero negativo, $\alpha = 0$, $\alpha = -1$, $\alpha = -2$, $\alpha = -3$, etc, no existe.

En segundo lugar, si en la misma expresión despejamos

$$\Gamma(\alpha+n+1) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots\ (\alpha+n)\ .\ \Gamma(\alpha) \qquad (1.8)$$

y tomamos límites en ambos miembros, llegamos a la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(\alpha+n+1) = \Gamma(\alpha)\ .\ \lim_{n\to\infty} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots(\alpha+n)$$

Y si recurrimos al resultado obtenido en (1.7), luego de despejar $\Gamma(\alpha)$ en la última ecuación obtenemos:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\ n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots\ (\alpha+n)} \qquad (1.9)$$

Esta igualdad nos permite extender el concepto de función gamma a cualquier número real. Como la fórmula es asintótica, es también posible obtener el factorial de cualquier número con la aproximación deseada, con tal que tomemos n suficientemente grande.

Verificaremos a continuación, con un ejemplo, el cumplimiento de las ecuaciones (1.8) y (1.9). Veamos en primer lugar que se cumple la (1.8):

Ejemplo: Sea $\alpha = 5$

Según la (1.8) deberá ser:

$$\Gamma(5+n+1) = \Gamma(6+n) = \Gamma(5)\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8\ .\ \ldots\ .\ (5+n)$$

Supongamos que $n = 7$. Entonces vemos que, efectivamente:

$$\Gamma(5+7+1) = \Gamma(13) = \Gamma(5)\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8\ .\ 9\ .\ 10\ .\ 11\ .\ 12 = 12!$$

Veamos ahora qué ocurre con respecto a la (1.9).

$$\Gamma(5) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\ n^5}{5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8\ .\ \ldots\ .\ (5+n)}$$

En primer lugar, sabemos que

$$\Gamma(5) = 4! = 24$$

Veremos de verificar este resultado. Sea por caso n = 10. Reemplazando:

$$\Gamma(5) \cong \frac{10!\,.\,10^5}{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10\,.\,11\,.\,12\,.\,13\,.\,14\,.\,15} = \frac{3{,}63\,.\,10^6\,.\,10^5}{5{,}45\,.\,10^{10}} = 6{,}66$$

Comprobamos que para un número tan pequeño como n = 10, el error es intolerable.

Veamos qué valor se obtiene para, por ejemplo, n = 1000.

$$\Gamma(5) \cong \frac{1000!\,.\,1000^5}{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10\,.\,11\,.\,12\;...\;1005} = \frac{4{,}024\,.\,10^{2582}}{1{,}702\,.\,10^{2581}} = 23{,}64$$

Se observa en efecto una mucho mejor aproximación

1.6 - Funciones Factoriales:

Se define como *función factorial* de x, de grado m y diferencia k al producto:

$$x\,.\,(x-k)\,.\,(x-2k)\,.\,(x-3k)\;...\;(x-m+k)$$

donde m es un múltiplo entero de k: m = N k, con N entero. Veremos más adelante que es posible obviar esta condición, siempre que quede definido cual es el último término del producto.

La función factorial se suele representar de la forma siguiente:

$$[\,x\,]_k^m = x\,.\,(x-k)\,.\,(x-2k)\,.\,(x-3k)\;...\;(x-m+k)$$

$$= x\,.\,(x-k)\,.\,(x-2k)\,.\,(x-3k)\;...\;[\,x-(N-1)\,k\,]$$

Ejemplos:

$$[\,8\,]_1^5 = 8\,(8-1)\,.\,(8-2)\;...\;(8-5+1) = 8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4$$

$$[\,16\,]_2^8 = 16\,(16-2)\,.\,(16-4)\;...\;(16-8+2) = 16\,.\,14\,.\,12\,.\,10$$

$$[\,16\,]_3^9 = 16\,(16-3)\,.\,(16-9+3) = 16\,.\,13\,.\,10$$

$$[\,16\,]_5^{10} = 16\,(16-10+5) = 16\,.\,11$$

$$[\,16\,]_5^{15} = 16\,(16-5)\,.\,(16-15+5) = 16\,.\,11\,.\,6$$

$$[\,17\,]_2^8 = 17\,(17-2)\,.\,(17-4)\;...\;(17-8+2) = 17\,.\,15\,.\,13\,.\,11$$

$$[\,17\,]_3^9 = 17\,(17-3)\,.\,(17-9+3) = 17\,.\,14\,.\,11$$

etc.

A continuación vamos a calcular la diferencia, que llamaremos

$$\Delta\,[\,x\,]_1^m\,,$$

entre la función factorial de x y la de x + 1, ambos del mismo grado m, y diferencia k = 1.

Aplicando la definición de función factorial:

$$[\,x\,]_1^m = x\,.\,(x-1)\,.\,(x-2)\,.\,(x-3)\;\ldots\;(x-m+1)$$

y $$[\,x+1\,]_1^m = (x+1)\,.\,x\,.\,(x-1)\,.\,(x-2)\,.\,(x-3)\;\ldots\;(x-m+2)$$

Por lo tanto,

$$\Delta\,[\,x\,]_1^m = [\,x+1\,]_1^m - [\,x\,]_1^m =$$

$$= x\,.\,(x-1)\,.\,.\,(x-2)\,.\,(x-3)\;\ldots\;(x-m+2)\,.\,[\,(x+1)-(x-m+1)\,]$$

$$= x\,.\,(x-1)\,.\,.\,(x-2)\,.\,(x-3)\;\ldots\;(x-m+2)\,.\,m = m\,.\,[\,x\,]_1^{m-1}$$

Es decir:

$$\Delta\,[\,x\,]_1^m = m\,.\,[\,x\,]_1^{m-1} \qquad (1.10)$$

Ejemplo:

$$[\,7\,]_1^3 - [\,6\,]_1^3 = 7\,.\,6\,.\,5 - 6\,.\,5\,.\,4 = 3\,.\,6\,.\,5 = 3\,[\,6\,]_1^2 = 3\,(\,6\,.\,5\,) = 90$$

Vemos que se cumple la igualdad.

Volviendo a la (1.10), si en la misma dividimos ambos miembros por el factorial ordinario de m, obtenemos:

$$\frac{\Delta\,[\,x\,]_1^m}{m!} = \frac{m\,.\,[\,x\,]_1^{m-1}}{m!} = \frac{[\,x\,]_1^{m-1}}{(m-1)\,!}$$

Pero como

$$\Delta\,[\,x\,]_1^m = [\,x+1\,]_1^m - [\,x\,]_1^m = m\,.\,[\,x\,]_1^{m-1}$$

reemplazando arriba vemos finalmente que:

$$\frac{[\,x+1\,]_1^m}{m!} = \frac{[\,x\,]_1^m}{m!} + \frac{[\,x\,]_1^{m-1}}{(m-1)\,!}$$

Estas fórmulas se utilizan ampliamente en la teoría de la interpolación.

Volviendo a la definición de las funciones factoriales, cuando no se indica el valor de m entendemos que el último factor del producto es el último número positivo (o de parte real positiva) de la serie.

También, si x es un número entero n y además, m es igual a n y la diferencia entre dos términos consecutivos es k = 1, nos encontramos frente a los factoriales ordinarios

$$[\,12\,]_1^{12} = 12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\,.\,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 12\,!$$

En tal caso, es decir, cuando m = x, es preferible utilizar la notación, más simple:

$$[\,12\,]_1 \tag{1.11}$$

Con esta notación podemos también decir que:

$$[\,12\,]_1 = 12\,!$$

Cuando la diferencia es igual a dos, encontramos dos situaciones diferentes:

- Si n es impar, el factorial de segundo orden resulta:

$$[\,7\,]_2 = 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1$$

que se suele indicar así:

$$[\,7\,]_2 = 7\,!!$$

Nótese que en este caso, m no es un múltiplo entero de k. Pero el último término es por definición el número 1, como en el caso de los factoriales ordinarios. Tal definición es necesaria, porque de lo contrario, el término final sería

$$(\,x - m + k\,) = 7 - 7 + 2 = 2,$$

que no respeta la regla de la diferencia entre dos términos consecutivos: $k = 2$

- Por el contrario, si n es par, entonces terminamos en el número 2:

$$[\,10\,]_2 = 10 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2 = 10\,!!$$

Es obvio que esta definición es necesaria, porque en caso contrario todos los factoriales de segundo orden de un número par serían nulos, al estar multiplicados por cero. Aquí sí se aplica el concepto de definir el último término con la fórmula:

$$(\,x - m + k\,)$$

En efecto:

$$10 - 10 + 2 = 2$$

Utilizando la misma notación definida en (1.11), podríamos escribir:

$$[\,26\,]_5 = 26 \,.\, 21 \,.\, 16 \,.\, 11 \,.\, 6 \,.\, 1$$

$$[\,3 + 3\,i\,]_{1+i} = (\,3 + 3\,i\,) \,.\, (\,2 + 2\,i\,) \,.\, (\,1 + i\,)$$

$$[\,26\,]_4 = 26 \,.\, 22 \,.\, 18 \,.\, 14 \,.\, 10 \,.\, 6 \,.\, 2$$

$$[\,27\,]_3 = 27 \,.\, 24 \,.\, 21 \,.\, 18 \,.\, 15 \,.\, 12 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 3$$

etc.

Obsérvese que ni en el primero ni en el tercero de estos cuatro casos, el último término puede ser definido por la fórmula

$$(x - m + k)$$

Ello se debe a que, en los mismos, m no es múltiplo entero de k, como se ve por simple inspección. En ambos casos, tomaremos como término final del producto, el último cuyo valor sigue siendo todavía positivo.

Se definen también otros factoriales, que estudiaremos a continuación, en los cuales n es un número entero. Los mismos son particularmente interesantes en operaciones de cálculo numérico:

$$(2 n) ! = [2 n]_1 = 1 . 2 . 3 \ldots n . (n + 1) . (n + 2) \ldots 2n$$

y

$$(2 n) !! = [2 n]_2 = 2 . 4 . 6 . 8 \ldots 2n$$

Así como varios otros que se derivan de ellos, y que veremos enseguida. Pero antes vamos a estudiar algunas relaciones entre aquellos:

Podemos reordenar la primera de las dos ecuaciones anteriores, de la siguiente forma:

$$(2 n) ! = 1 . 3 . 5 \ldots n . 2 . 4 . 6 . 8 \ldots 2n$$

de donde deducimos que

$$(2 n) ! = n !! . (2 n) !!$$

Otra relación interesante es la siguiente:

$$(2 n) !! = 2 . 4 . 6 . 8 \ldots 2 n = (2 . 1) . (2 . 2) . (2 . 3) . (2. 4) \ldots (2 . n)$$

de donde, reordenando:

$$(2 n) !! = (2 . 2 . 2 \ldots 2) . (1 . 2 . 3 . 4 \ldots n) = 2^n . n ! \qquad (1.12)$$

De modo similar:

$$(2 n) ! = 2 n . (2n - 1) . (2 n - 2) . (2 n - 3) (2 n - 4) \ldots 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$

Se puede reordenar así:

$$(2 n) ! = 2 n . (2 n - 2) . (2 n - 4) \ldots 4 . 2 . (2n - 1) . (2 n - 3) \ldots 5 . 3 . 1$$

De donde resulta la igualdad:

$$(2 n) ! = (2 n)!! . (2 n - 1) !!$$

Si llamamos

$$n = \frac{q}{2}$$

entonces

$$q = 2 n$$

Como se ha visto, (1.12), es:

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!$$

Cambiando el nombre de la variable, podemos también escribir la relación así:

$$(2q)!! = 2^q \cdot q!$$

Reemplazando aquí el valor de q, deducimos finalmente que

$$(n)!! = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!$$

De donde resulta la siguiente expresión que permite calcular un cierto "producto factorial" de números fraccionarios (Ver el apartado 1.17):

$$\left(\frac{n}{2}\right)! = \frac{n!!}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Se definen también estas otras dos factoriales, en las cuales n debe ser, como veremos más adelante, un número par:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)! = \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 3\right) \ldots =$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{2}\right) \ldots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

Ver al respecto la ecuación (1.6). También:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)! = \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 3\right) \ldots =$$

$$= \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-5}{2}\right) \ldots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

Observando ambas ecuaciones, podemos ver que se verifica la igualdad:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)! = \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!.$$

Si n es impar, estas dos funciones factoriales se reducen a los factoriales ordinarios de un número entero. En efecto, si n es un número impar, entonces

$$\frac{n \pm 1}{2} \quad , \qquad \text{es un número entero.}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{8-1}{2}\right)! = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

Por el contrario, si n es impar, resulta como vemos:

$$\left(\frac{9-1}{2}\right)! = 4\,!$$

Veamos, para terminar, las funciones gamma siguientes, en las que k es un número entero:

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \left(\frac{2k+1}{2} - 1\right)! = \left(\frac{2k-1}{2}\right)!$$

Como 2 k es siempre un número par, este caso se reduce al anterior, con 2k = n, par. Es decir:

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

De forma absolutamente similar, se obtiene, obviamente:

$$\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{2k-3}{2} \cdot \frac{2k-5}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

1.7 - Función B (Beta) o Euleriana de primera especie:

Se define así la función:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\beta - 1}\, dt$$

La función B satisface la propiedad conmutativa: Si α y β son positivos ambos, se verifica que:

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

como vamos a probar a continuación. En efecto, aplicando la definición, resulta

$$B(\beta, \alpha) = \int_0^1 t^{\beta - 1} (1 - t)^{\alpha - 1}\, dt \tag{1.13}$$

Si hacemos el cambio de variables:

$$u = 1 - t$$

$\therefore \qquad t = 1 - u \qquad y \qquad dt = - du$

Asimismo, los límites de la integral se transforman como sigue:

Si $\qquad t = 0, \qquad$ entonces $u = 1$

Y si $\qquad t = 1, \qquad$ entonces $u = 0$

reemplazando en (1.13) resulta

$$B(\beta, \alpha) = \int_1^0 (1-u)^{\beta-1} . u^{\alpha-1} (-du) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du = B(\alpha, \beta)$$

con lo que queda demostrado.

1.8 - Relación entre las funciones B y Γ:

En esta Sección vamos a ver que las funciones Γ y B de Euler están estrechamente relacionadas entre sí. Para ello, comenzaremos llamando

$$t = \text{sen}^2 \varphi$$

Por aplicación de la relación pitagórica, obtenemos

$$1 - t = \cos^2 \varphi$$

y de aquí:

$$d t = - 2 \cos \varphi \; d \cos \varphi = 2 \,\text{sen}\, \varphi \cos \varphi \; d\varphi$$

En este caso, los límites de la integral que define la función B son, respectivamente:

Para $\qquad t = 0,$

$\text{sen}\, \varphi = 0 \qquad$ y por tanto $\qquad \varphi = 0$

y para $\qquad t = 1,$

$\text{sen}\, \varphi = 1 \qquad$ y por tanto $\qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Al reemplazar dichos valores en la expresión de la función B, la misma queda modificada como sigue:

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2 \varphi)^{\alpha-1} (\cos^2 \varphi)^{\beta-1} \text{sen}\, \varphi \cos \varphi \; d\varphi$$

$$\therefore \qquad B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2\alpha-1} \varphi \;.\; \cos^{2\beta-1} \varphi \;. d\varphi \qquad (1.14)$$

Por otra parte, recurriendo a la definición (1.1) de la función Γ, podemos decir que el producto de las funciones Γ de α y β es igual a:

$$\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\,.\,e^{-t}\,dt\,.\int_0^\infty u^{\beta-1}\,.\,e^{-u}\,du \tag{1.15}$$

Seguidamente hagamos el cambio de variables:

$$t = x^2$$

$$\therefore \quad dt = 2\,x\,dx$$

y $\quad u = y^2$

$$\therefore \quad du = 2\,y\,dy$$

Reemplazamos estos valores en las dos integrales del segundo miembro de la (1.15), con lo cual

$$\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty x^{2\alpha-2}\,.\,e^{-x^2}\,x\,dx\,.\int_0^\infty y^{2\beta-2}\,.\,e^{-y^2}\,y\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty x^{2\alpha-1}\,.\,e^{-x^2}\,dx\,.\int_0^\infty y^{2\beta-1}\,.\,e^{-y^2}\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}\,y^{2\beta-1}\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \tag{1.16}$$

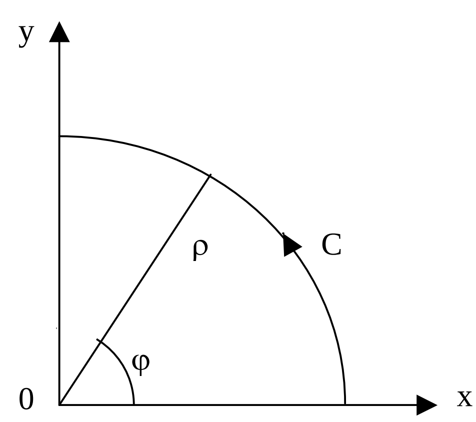
Pasemos ahora a coordenadas polares. Según se ha visto en la Sección 1.2 las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las polares se pueden establecer así:

$$z = x + i\,y = \rho\,e^{i\varphi}$$

$$\therefore \quad x = \rho\,\cos\varphi$$

$$y = \rho\,\operatorname{sen}\varphi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



También de acuerdo con la ecuación (1.4):

$$dx\,dy \equiv \rho\,d\varphi\,d\rho$$

Por otra parte, la integral de superficie (1.16) está circunscripta al primer cuadrante, donde

$$0 \le x \le +\infty$$

y, $0 \leq y \leq +\infty$

En coordenadas polares, los límites de la superficie correspondiente al primer cuadrante están definidos (Ver la figura) por:

$$0 \leq \rho \leq +\infty$$

y, $0 \leq \varphi \leq +\dfrac{\pi}{2}$

En consecuencia, para que la integral de superficie abarque efectivamente la totalidad del primer cuadrante, los límites de integración en dichas cooordenadas deberán ser:

Para ρ: 0 e ∞

y para φ: 0 y $\pi/2$

Esto equivale a integrar sobre el segmento de curva C, con la salvedad de considerar los límites indicados. Es decir:

$$\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta) = 4 \iint_C \rho^{2\alpha -1} \cos^{2\alpha -1} \varphi \,.\, \rho^{2\beta -1} \operatorname{sen}^{2\beta -1} \varphi \,.\, e^{-\rho^2} . \rho \, d\varphi \; d\rho$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \rho^{2(\alpha+\beta) -1} . e^{-\rho^2} . d\rho \,.\, 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha -1} \varphi \,.\, \operatorname{sen}^{2\beta -1} \varphi \,.\, d\varphi$$

$$= B(\alpha, \beta) \,.\, 2 \int_0^{\infty} \rho^{2(\alpha+\beta) -1} . e^{-\rho^2} . d\rho \tag{26.17}$$

Llamemos ahora

$$t = \rho^2 \qquad \therefore \qquad d\rho = d\, t^{1/2} = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$$

También

$$\rho^{-1} = t^{-1/2} \qquad \therefore \qquad 2\rho^{-1} d\rho = t^{-1/2 - 1/2} \, dt = t^{-1} dt$$

Reemplazando estos valores en la (1.17), resulta

$$\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta) \,.\, \int_0^{\infty} t^{(\alpha+\beta) -1} . e^{-t} . dt = B(\alpha, \beta) \,.\, \Gamma(\alpha + \beta)$$

De donde deducimos que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \tag{26.18}$$

1.9 - Fórmula del complemento:

Detengámonos en el análisis del producto:

$$\Gamma(\rho)\,.\,\Gamma(1-\rho)$$

donde $\rho < 1$, y $\mathrm{Re}(\rho) > 0$

En este apartado comprobaremos que

$$\Gamma(\rho)\,.\,\Gamma(1-\rho) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\,\rho\,\pi}$$

Esta ecuación se conoce como *Fórmula del Complemento*.

Recurriendo al teorema anterior (1.18), haciendo:

$$\alpha = \rho \qquad \text{y} \qquad \beta = 1-\rho$$

y por tanto

$$\alpha + \beta = 1,$$

podemos despejar $\Gamma(\rho)\,.\,\Gamma(1-\rho)$, con lo que obtenemos:

$$\Gamma(\rho)\,.\,\Gamma(1-\rho) = \Gamma(1)\,.\,B(\rho, 1-\rho) = B(\rho, 1-\rho) = \int_0^1 t^{\rho-1}\,.\,(1-t)^{-\rho}\,.\,dt$$

Recordemos que $\Gamma(1) = 1$. Hagamos a continuación el cambio de variable:

$$\tau = \frac{t}{1-t}$$

De aquí podemos extraer las conclusiones siguientes:

$$\tau - \tau t = t \qquad \therefore \qquad \tau = t + \tau t = (1+\tau)\,t$$

Ahora, despejemos t:

$$\therefore \qquad t = \frac{\tau}{1+\tau}$$

Por lo tanto, la diferencial de t es:

$$\therefore \qquad dt = \frac{(1+\tau)-\tau}{(1+\tau)^2}\,d\tau = \frac{d\tau}{(1+\tau)^2}$$

También,

$$1-t = 1 - \frac{\tau}{1+\tau} = \frac{1}{1+\tau}$$

Reemplazando estos valores y teniendo en cuenta que cuando t = 1, τ tiende a infinito, se verifica la igualdad siguiente:

$$\Gamma(\rho).\Gamma(1-\rho) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\rho-1} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^{-\rho} \frac{1}{(1+\tau)^2}\, d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\rho-1} . \, (1+\tau)^{\rho} . \, \frac{1}{(1+\tau)^2}\, d\tau$$

Efectuemos ahora los productos indicados en el numerador y denominador, y resultará:

$$\Gamma(\rho).\Gamma(1-\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\rho-1}\,(1+\tau)^{\rho}}{(1+\tau)^{\rho-1}\,(1+\tau)^2}\, d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\rho-1}(1+\tau)^{\rho}}{(1+\tau)^{\rho+1}}\, d\tau$$

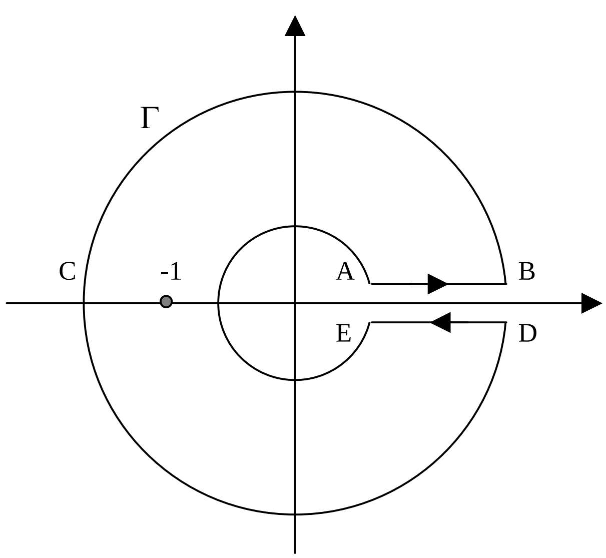
Finalmente, simplificando en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\Gamma(\rho).\Gamma(1-\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\rho-1}}{(1+\tau)}\, d\tau \qquad (1.19)$$

Esta integral se puede resolver por el método de los residuos. Para ello, comenzamos por considerar la integral de

$$f(z) = \frac{z^{\rho-1}}{(1+z)}\, dz$$

a lo largo del contorno Γ que se muestra en la figura siguiente:



En la misma, los dos tramos horizontales AB y DE, aunque los dibujemos separados por razones de claridad, están ambos infinitamente próximos al eje x.

Ahora debemos calcular el residuo de f (z) en el punto

$$z_o = -1$$

interior al contorno Γ. En primer lugar, expresaremos la variable z en coordenadas polares:

$$z = \rho \ e^{i\theta}$$

Lo mismo

$$z_o = 1 \, . \, e^{i\pi} = e^{i\pi}$$

Por su parte, el residuo de f (z) en z_o es:

$$\therefore \qquad \operatorname{res}_{z_o} = \lim_{z \to z_o} z^{\rho-1} = e^{i\pi(\rho-1)}$$

Entonces, aplicando el teorema de Cauchy-Goursat, obtenemos:

$$\int_\Gamma \frac{z^{\rho-1}}{1+z} \, dz = 2\pi i \, . \, e^{i\pi(\rho-1)}$$

A continuación segmentaremos esta integral en tantos tramos como los que conforman el contorno Γ, partiendo desde el punto A. También, identificaremos con las letras r y R los radios de las dos circunferencias, interior y exterior respectivamente, que forman parte de dicho contorno Γ. Será:

$$\int_r^R \frac{x^{\rho-1}}{1+x} \, dx + \int_0^{2\pi} \frac{z^{\rho-1}}{1+z} \, dz + \int_R^r \frac{(x\, e^{2\pi i})^{\rho-1}}{1+x\, e^{2\pi i}} \, dx + \int_{2\pi}^0 \frac{z^{\rho-1}}{1+z} \, dz = 2\pi i \, . e^{i\pi(\rho-1)}$$

Nótese que en la tercera de estas integrales se ha puesto $x\, e^{2\pi i}$ en lugar de x. Esto es porque la coordenada del punto D está desplazada de un ángulo de 360° respecto de la correspondiente al punto B. Lo mismo ocurre con los puntos A y E. (Recordemos también que la variable en la ecuación anterior es z. Si podemos escribir en algún caso x, ello se da únicamente en los dos tramos horizontales, en los que la componente imaginaria, y, es igual a cero).

La ecuación genérica de los puntos z pertenecientes a la circunferencia exterior, expresados en coordenadas polares, es:

$$z = R \, . \, e^{i\theta} \qquad \therefore \quad dz = R\, i\, e^{i\theta} \, d\theta$$

Igualmente, los puntos pertenecientes a la circunferencia interior, responden a la ecuación

$$z = r \, . \, e^{i\theta} \qquad \therefore \quad dz = r\, i\, e^{i\theta} \, d\theta$$

Reemplazando ambos valores resulta:

$$\int_r^R \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(R\,e^{i\theta})^{\rho-1}\, i\, R\,e^{i\theta}}{1+R\,e^{i\theta}}\,d\theta + \int_R^r \frac{(x\,e^{2\pi i})^{\rho-1}}{1+x\,e^{2\pi i}}\,dx +$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \frac{(r\,e^{i\theta})^{\rho-1}\, i\, r\, e^{i\theta}}{1+r\,e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

Analizaremos ahora qué ocurre cuando se dan, simultáneamente, las dos condiciones siguientes

$$r \to 0$$

y $$R \to \infty$$

Entonces, como hemos establecido que

$$0 < \rho < 1$$

la segunda integral es nula porque el integrando respectivo tiende a cero. En efecto, podemos hacer:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{(R\,e^{i\theta})^{\rho-1}\, i\, R\,e^{i\theta}}{1+R\,e^{i\theta}} = \lim_{R\to\infty} (R\,e^{i\theta})^{\rho-1} \,.\, \lim_{R\to\infty} \frac{i\,R\,e^{i\theta}}{1+R\,e^{i\theta}} = 0\,.\,i = 0$$

La cuarta integral es nula a su vez, porque lo es el integrando cuando r tiende a cero. Por lo tanto, queda finalmente:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx + \int_\infty^0 \frac{(x\,e^{2\pi i})^{\rho-1}}{1+x\,e^{2\pi i}}\,dx = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

O también:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx + e^{2\pi i(\rho-1)} \int_\infty^0 \frac{x^{\rho-1}}{1+x\,e^{2\pi i}}\,dx = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

Pero como

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$$

Reemplazando este valor en el integrando de la segunda integral, tenemos:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx + e^{2\pi i(\rho-1)} \int_\infty^0 \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx - e^{2\pi i(\rho-1)} \int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

$$\therefore \qquad (1 - e^{2\pi i(\rho-1)}) \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\, dx = 2\pi i \,.\, e^{i\pi(\rho-1)}$$

Despejando ahora la integral, encontramos que su valor es:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\, dx = 2\pi i \,.\, \frac{e^{i\pi(\rho-1)}}{(1 - e^{2\pi i(\rho-1)})} = 2\pi i \,.\, \frac{e^{i\pi\rho}\, e^{-i\pi}}{1 - e^{2\pi i\rho}\, e^{-2\pi i}}$$

También es:

$$e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i\,\mathrm{sen}(-2\pi) = 1$$

y

$$e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\pi) = -1$$

Reemplazando, observamos:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\, dx = 2\pi i \,\frac{-\,e^{i\pi\rho}}{1 - e^{2\pi i\rho}}$$

y multiplicando numerador y denominador por $-\,e^{-\pi i\rho}$ tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x}\, dx = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi i\rho} - e^{\pi i\rho}} = \frac{\pi}{\dfrac{e^{\pi i\rho} - e^{-\pi i\rho}}{2i}} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\rho\pi}$$

Si trasladamos este reultado a la ecuación (1.19), vemos que si $0 < \rho < 1$, entonces:

$$\Gamma(\rho)\,.\,\Gamma(1-\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\rho-1}}{(1+\tau)}\, d\tau = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\rho\pi}$$

Quedando demostrada así la Fórmula del Complemento.

1.10 - Factorial de 0,5:

El teorema del complemento permite también verificar el valor de la función Γ de 1/2. Si hacemos:

$$\rho = \frac{1}{2}$$

podemos hacer:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) . \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi / 2} = \pi$$

Por lo tanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

resultado que coincide con el alcanzado en el apartado 1.3.

1.11 - Integrales de Wallis:

Se conoce como *Integral de Wallis* a cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \qquad (1.20)$$

y también

y $$\int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \qquad (1.21)$$

cuyo valor final coincide en ambos casos. Esto no debe extrañar dado que las áreas bajo el seno y el coseno, en el intervalo $(0, \pi/2)$, son iguales.

Demostración: Hemos visto (1.14) que:

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\alpha - 1} \varphi \;.\; \cos^{2\beta - 1} \varphi \;. d\varphi$$

Si llamamos

$$\beta = \frac{m+1}{2} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

entonces:

$$2\alpha - 1 = 0$$

y $$2\beta - 1 = m$$

Por lo que, reemplazando tenemos

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^m \varphi \;. d\varphi$$

Si por el contrario, llamamos

$$\alpha = \frac{m+1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

reemplazando como antes resulta:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m \varphi \, . \, d\varphi$$

Con esto queda demostrada la validez de las expresiónes (1.20) y (1.21).

A partir de este resultado y las relaciones que vinculan las funciones B y Γ, pueden demostrarse las fórmulas que veremos ahora, que relacionan las integrales de Wallis con la función Γ.

Por (1.18), es

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Reemplazando α y β por los valores asignados más arriba, tenemos:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

La relación

$$\Gamma(n+1) = n\,.\,\Gamma(n)$$

permite reemplazar el denominador de la última fracción, así:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\frac{m}{2}\;\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

Reemplazamos ahora en las ecuaciones (1.20) y (1.21) y obtenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \; dt = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m\;\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

E, igualmente

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t \ dt = \frac{\sqrt{\pi} \quad \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m \quad \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

1.12 - Fórmula de Recurrencia para el cálculo de las integrales de Wallis.

Veremos a continuación otra forma de expresar las integrales de Wallis, que conduce a una interesante fórmula de recurrencia para el cálculo de aquellas.

Empezaremos por analizar integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m t \,.\, \cos^n t \ .\ d\,t$$

Usualmente, estas integrales se resuelven por el método de sustitución. Ejemplo:

$$\int \operatorname{sen}^2 t \,.\, \cos^3 t \ .\ d\,t = \int \operatorname{sen}^2 t \,.\, \cos^2 t \,.\, \cos t \,.\, d\,t =$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 t \,.\, (1 - \operatorname{sen}^2 t) \,.\, d \operatorname{sen} t = \int u^2 \,.\, (1 - u^2) \,.\, d\,u =$$

$$= \int u^2\, d\,u - \int u^4\, d\,u = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 t + C$$

Lo mismo:

$$\int \operatorname{sen}^3 t \,.\, d\,t = \int \operatorname{sen}^2 t \,.\, \operatorname{sen} t \,.\, d\,t = -\int (1 - \cos^2 t) \,.\, d \cos t =$$

$$= -\int (1 - u^2) \,.\, d\,u = -\int d\,u + \int u^2\, d\,u = -u + \frac{u^3}{3} + C =$$

$$= -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + C$$

Trataremos a continuación de calcular la integral de Wallis,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \,.\, d\,t,$$

pero en este caso vamos a recurrir al procedimiento de integración por partes en lugar del de sustitución:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \,.\, d\,t = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-1} t \,.\, \operatorname{sen} t \,.\, d\,t = -\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-1} t \,.\, d \cos t$$

Hagamos

$$u = \operatorname{sen}^{m-1} t \qquad \therefore \qquad du = (m-1) \cdot \operatorname{sen}^{m-2} t \cdot \cos t \cdot dt$$

y

$$dv = d\cos t \qquad \therefore \qquad v = \cos t$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \cdot dt = - \operatorname{sen}^{m-1} t \cdot \cos t \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} t \cdot \cos^2 t \, dt$$

El primer sumando del segundo miembro en la igualdad anterior es igual a cero, por ser nulos el coseno de $\pi / 2$ y el seno de cero. Por tanto:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \cdot dt = (m-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} t \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 t)\, dt =$$

$$= (m-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} t \cdot dt - (m-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \, dt$$

Si, para simplificar la escritura, llamamos I_m a la integral de Wallis de exponente m:

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \cdot dt$$

podemos escribir la ecuación anterior así:

$$I_m = (m-1)\, I_{m-2} - (m-1)\, I_m$$

$$\therefore \qquad I_m + (m-1)\, I_m = (m-1)\, I_{m-2}$$

de donde, despejando I_m se obtiene:

$$I_m = \frac{(m-1)}{m} I_{m-2} \tag{1.22}$$

Si ahora llamamos

$$I_{m-2} = I_p$$

y procedemos a calcular I_p como antes , obtendremos el resultado siguiente, como es obvio:

$$I_p = \frac{(p-1)}{p} I_{p-2}$$

Al reemplazar aquí p por su valor m - 2, hallamos:

$$I_{m-2} = \frac{(m-3)}{m-2} I_{m-4}$$

y reemplazando nuevamente este valor en la (1.22):

$$I_m = \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-3)}{m-2} I_{m-2}$$

Reiterando este procedimiento, si m es un número par, al ir restando de dos en dos, la última integral de la serie será I_0, es decir:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 t \, . \, dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Y por lo tanto, I_m estará dado por la igualdad:

$$I_m = \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-3)}{m-2} \ldots \frac{\pi}{2} = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Como m es par, podemos también expresar la ecuación anterior así:

Hagamos $m = 2n$, con n número natural.

$$\therefore \qquad I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Por el contrario, si m es un número impar, la última integral de la serie será I_1

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \, . \, dt = -\int_0^{\pi/2} d \cos t = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

y entonces,

$$I_m = \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-3)}{m-2} \ldots 1 = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

Como en este caso m es impar, podemos poner:

$m = 2n + 1$, con n número natural.

$$\therefore \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)} \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)(2n-1)!!}$$

O también, si $m = 2n - 1$,

$$\therefore \qquad I_{2n-1} = \frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \ldots = \frac{(2n)!!}{2n\,(2n-1)!!}$$

Fórmulas que, como vemos, permiten calcular las integrales de Wallis en forma sencilla.

1.13 - Fórmula de Wallis: Expresión asintótica del número π.

Recordemos que

$$I_{2n-1} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} t \,.\, d t$$

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} t \,.\, d t$$

e

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} t \,.\, d t$$

En el primer cuadrante, es decir entre 0 y $\pi/2$, el seno es positivo y menor o igual que 1, y además n es también un número positivo; entonces, a mayor exponente, menor será el valor de $\operatorname{sen}^m t$. O sea:

$$\operatorname{sen}^{2n-1} t \geq \operatorname{sen}^{2n} t \geq \operatorname{sen}^{2n+1} t$$

Por lo que:

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

En este caso corresponde únicamente el signo >, porque la desigualdad entre los respectivos integrandos es válida para todo el intervalo entre 0 y $\pi/2$, con la única excepción de los dos extremos del mismo.

Reemplazando las integrales por los respectivos valores determinados en el apartado anterior, podemos escribir la desigualdad siguiente:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\ 2n} > \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{(2n)!!}{(2n+1)\,.\,(2n-1)!!}$$

A continuación, multiplicaremos los tres miembros de esta desigualdad por $(2n)!!$ y los dividiremos por $(2n-1)!!$:

$$\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 \,.\, 2n} > \frac{\pi}{2} > \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 \,.\, (2n+1)}$$

Analizando esta desigualdad, se hace evidente, por aplicación del Teorema del Valor Medio, que debe existir un número θ, siendo

$$0 < \theta < 1$$

tal que:

$$\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 \,.\, (2n+\theta)} = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\pi = \frac{2 \,.\, [(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 \,.\, (2n+\theta)}$$

Si multiplicamos y dividimos esta ecuación por n, tendremos:

$$\pi = \frac{2n \,.\, [(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 \,.\, (2n+\theta)} \,.\, \frac{1}{n}$$

Si ahora tomamos limites para $n \to \infty$

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2} \,.\, \frac{2n}{(2n+\theta)} \,.\, \frac{1}{n}$$

y como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{(2n+\theta)} = 1$$

simplificando llegamos a la siguiente fórmula, debida a Wallis, que permite expresar el número π en forma asintótica, es decir, como el límite de una razón:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2} \,.\, \frac{1}{n} \qquad (1.23)$$

La tabla siguiente muestra el valor que da la fórmula de Wallis para algunos valores de n:

Para n =	4	8	16	50	100
	3,3437	3,2412	3,1911	3,1573	3,1495

1.14 - Fórmula de Stirling:

La fórmula de Stirling permite calcular en forma aproximada el producto factorial de números n grandes, evitando la necesidad de efectuar los n productos que definen precisamente el factorial de n.
La misma puede obtenerse por dos caminos diferentes: A partir de la expresión del factorial de n, o bien por medio de las integrales de Wallis. Veremos ambos procedimientos en forma sucesiva.

Para encarar la primera demostración, partiremos de la relación que liga el factorial de un número con la función gamma

$$n! = \Gamma(n+1),$$

así como de la definición de ésta última:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \, e^{-t} \, dt$$

Con un cambio adecuado de nombres podemos escribir

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \, e^{-t} \, dt \qquad (1.24)$$

Introducimos esta modificación al solo efecto de generalizar la definicion de Γ más allá del campo de los números enteros. Por otra parte, si llamamos:

$t = e^{\alpha}$,

entonces $\alpha = \ln t$

y por tanto: $t^x = e^{\alpha x} = e^{x \ln t}$

Reemplazando esta igualdad en la (1.24), obtendremos:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{x \ln t} \, e^{-t} \, dt = \int_0^\infty e^{-t + x \ln t} \, dt = \int_0^\infty e^{(-t/x + \ln t)\, x} \, dt$$

Hagamos ahora un nuevo cambio de variables:

$$\frac{t}{x} = u \qquad \therefore \qquad t = x\,u, \qquad y \qquad dt = x\,du$$

Este cambio de variable no implica ninguna modificación de los límites de integración. En efecto,

si $t = 0, \quad \therefore \quad u = 0$

y si $t = \infty, \quad \therefore \quad u = \infty$

Reemplazando la nueva variable en la útima integral, y recurriendo a la fórmula del logaritmo de un producto, resulta:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{(-u + \ln ux)\, x} \, x \, du = \int_0^\infty e^{(-u + \ln u + \ln x)\, x} \, x \, du$$

Como por la definición de logaritmo natural, sabemos que

$$e^{\ln x} = x$$

Reemplazando nuevamente obtenemos:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{(-u + \ln u)\, x} \, x^x \,.\, x \,.\, du = \int_0^\infty e^{(-u + \ln u)\, x} \, x^{x+1} du$$

Como la variable de integración es "u" podemos colocar x^{x+1} fuera del signo de integral:

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{\infty} e^{(-u+\ln u)x}\, du \qquad (1.25)$$

Para continuar, deberemos hacer el análisis que encararemos a continuación. Llamemos:

$$e^{-u+\ln u} = \phi(u)$$

De esta igualdad podemos sacar las siguientes conclusiones:

Si $u = 0, \quad \therefore \quad \phi(u) = 0, \quad$ pues $\quad \ln u \to -\infty$

y si $u \to \infty,$

$$\therefore \quad \lim_{u\to\infty} \phi(u) = 0$$

En efecto, como

$$\phi(u) = \frac{e^{\ln u}}{e^{u}}$$

para que se verifique el límite indicado bastará probar que u crece más rápidamente que ln u. Para ello, hallaremos el límite del cociente entre ambas magnitudes, recurriendo a la regla de L´Hopital:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$$

También, si

$$u = 1, \quad \therefore \quad \ln u = 0$$

entonces $\phi(u)\Big|_{u=1} = e^{-u}\Big|_{u=1} = \dfrac{1}{e}$

A continuación veremos que éste es el valor máximo de $\phi(u)$. Efectivamente si derivamos respecto de u e igualamos a cero obtenemos:

$$\frac{d\phi}{du} = e^{-u+\ln u} \cdot \frac{d}{du}(-u + \ln u) = e^{-u+\ln u}\left(-1 + \frac{1}{u}\right)$$

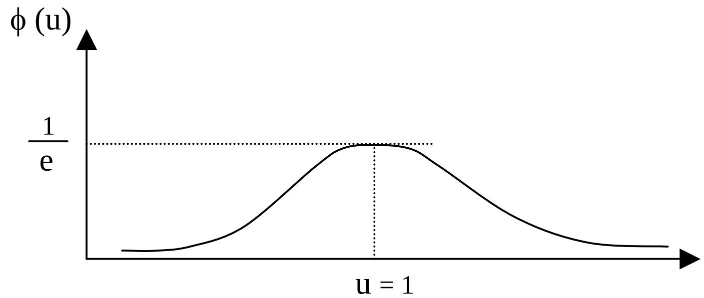
y de $e^{-u+\ln u}\left(-1 + \dfrac{1}{u}\right) = 0$

resulta $u = 1$

Con lo cual,

$$\phi_{máx}(u) = e^{-1+\ln 1} = e^{-1}$$

En resumen, la representación de $\phi(u)$ es aproximadamente como la que muestra la figura siguiente:



O sea que $\phi(u)$ es menor que e^{-1} para todo u distinto de 1. Por lo tanto, si elevamos $\phi(u)$ a una potencia x, como en la ecuación (1.25), dicha función tenderá rápidamente a cero al crecer el valor de x con lo cual queda justificada la representación que atribuimos a $\phi(u)$

A continuación, desarrollemos ln u en serie alrededor del punto $u_o = 1$. Recordemos para ello la fórmula de Taylor:

$$f(z) = f(z_o) + \frac{f'(z_o)}{1!}(z - z_o) - f''(z_o)\frac{(z - z_o)^2}{2!} + \ldots,$$

Aplicada a ln u, como

$$f'(z_o) = \frac{1}{u} = 1 \qquad f''(z_o) = -\frac{1}{u^2} = -1, \text{ etc.}$$

el desarrollo será:

$$\ln u = \ln 1 + (u - 1) - \frac{(u-1)^2}{2!} + \ldots = u - 1 - \frac{(u-1)^2}{2} + R \qquad (1.26)$$

En esta relación, R representa al *resto* de la serie.

Ahora sí, podemos volver a la ecuación (1.25):

$$\therefore \qquad \Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^\infty e^{(-u+\ln u)x}\,du$$

y la modificaremos multiplicando y dividiendo el integrando por e, como se ve a continuación:

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^\infty \left(e^{(-u+\ln u)} e \,.\, e^{-1}\right)^x du = x^{x+1}\, e^{-x}\int_0^\infty e^{(-u+1+\ln u)x}\,du$$

Reemplazando en esta igualdad ln u por su valor según (1.26), obtenemos:

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x}\int_0^\infty e^{[-u+1+u-1-0{,}5(u-1)^2+R]x}\,du$$

Simplificando, y llamando

$$F(u) = e^{-0{,}5(u-1)^2 x}\, e^{Rx}$$

resultará: $$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-0{,}5(u-1)^2 x}\, e^{Rx}\, du = x^{x+1} e^{-x} \int_0^{\infty} F(u)\, du$$

Para seguir, dividiremos la última integral en tres tramos, de la forma siguiente:

$$\int_0^{\infty} F(u)\, du = \int_0^{1-\xi} F(u)\, du + \int_{1-\xi}^{1+\xi} F(u)\, du + \int_{1+\xi}^{\infty} F(u)\, du = I_1 + I_2 + I_3$$

Calculemos ahora el valor de la primera integral, I_1:

$$I_1 = \int_0^{1-\xi} e^{-0{,}5(u-1)^2 x} \cdot e^{Rx}\, du$$

Llamemos:

$$\tau^2 = \frac{1}{2}(u-1)^2 x$$

Entonces $$u - 1 = \sqrt{\frac{2}{x}}\, \tau$$

$\therefore$ $$du = \sqrt{\frac{2}{x}}\, d\tau$$

Los límites de la integral se transforman así:

Para $u = 0,$ $$\tau = -\sqrt{\frac{x}{2}}$$

y para: $u = 1 - \xi,$ $$\tau = -\xi\sqrt{\frac{x}{2}}$$

Reemplazamos en I_1 y obtenemos:

$$I_1 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{-(x/2)^{1/2}}^{-\xi(x/2)^{1/2}} e^{-\tau^2}\, e^{Rx}\, d\tau \qquad (26.27)$$

Probaremos que el límite de la integral

$$\int_{-(x/2)^{1/2}}^{-\xi(x/2)^{1/2}} e^{-\tau^2}\, e^{Rx}\, d\tau \qquad (26.28)$$

es cero cuando x tiende a infinito. Para ello, observemos en primer lugar que como ξ está comprendido entre 0 y 1, debe ser, necesariamente:

$$|\xi| < 1$$

Por lo tanto, se debe cumplir la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} > \xi \sqrt{\frac{x}{2}}$$

y por consiguiente

$$-\sqrt{\frac{x}{2}} < -\xi \sqrt{\frac{x}{2}}$$

También, si $\tau = 0$, entonces

$$e^{-\tau^2} = 1$$

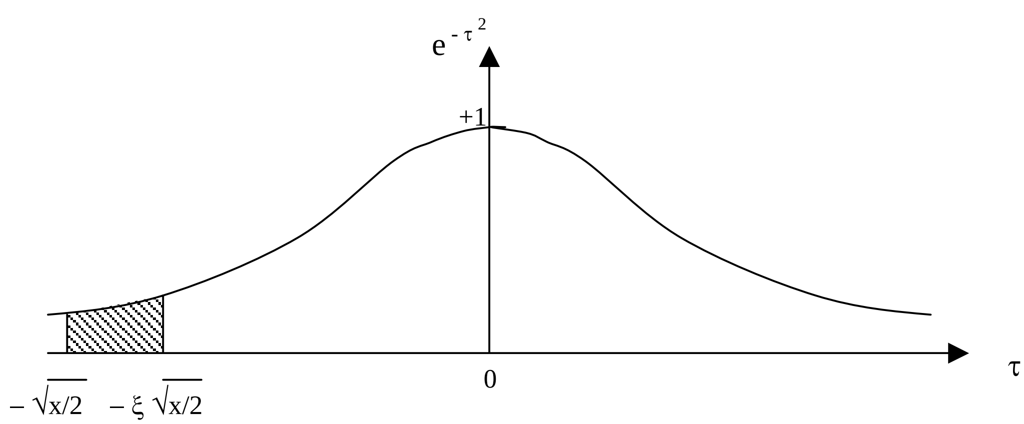
y si $\tau \to \infty$

entonces

$$\lim_{\tau \to -\infty} e^{-\tau^2} = \lim_{\tau \to \infty} e^{-|\tau|^2} = 0$$

Representemos todas estas condiciones en el siguiente gráfico, en el cual podemos ver que la integral (1.21) está representada por el área rayada, encerrada entre

$$-\sqrt{\frac{x}{2}} \quad \text{y} \quad -\xi\sqrt{\frac{x}{2}}$$



A medida que x crece, el área mencionada se corre hacia la izquierda del dibujo, haciéndose por lo tanto cada vez menor. De donde podemos sacar la conclusión siguiente:

$$\lim_{\tau \to -\infty} I_1 = \lim_{x \to \infty} I_1 = 0$$

Pasemos a analizar ahora la I_3.

$$I_3 = \int_{1+\xi}^{\infty} e^{-0{,}5\,(u-1)^2 x}\; e^{R\,x}\; du$$

Si hacemos el mismo reemplazo que antes, los límites de la integral se transforman así:

Para $u \to \infty$, es $\tau \to \infty$

y para: $u = 1 + \xi$, es $\tau = +\ \xi \sqrt{\dfrac{x}{2}}$

Reemplazando en I_3

$$I_3 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{\xi\,(x/2)^{1/2}}^{\infty} e^{-\tau^2}\; e^{R\,x}\; d\tau$$

También esta integral es nula cuando x tiende a infinito, por simetría con la situación anterior, pues ambos límites tienden a infinito. Resta finalmente analizar I_2:

$$I_2 = \int_{1-\xi}^{1+\xi} e^{-0{,}5\,(u-1)^2 x}\; e^{R\,x} du = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{-\xi\,(x/2)^{1/2}}^{\xi\,(x/2)^{1/2}} e^{-\tau^2}\; e^{R\,x}\; d\tau$$

Aquí, como

$$R = \frac{(u-1)^3}{3!} - \frac{(u-1)^4}{4!} + \frac{(u-1)^5}{5!} - \ \ldots$$

es evidente que cuando u tiende a 1, R tiende a cero. Por lo tanto, podemos concluir, formalmente, que

$$\lim_{u \to 1} I_2 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{1-\xi}^{1+\xi} e^{-\tau^2}\; e^{0}\; du = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{-\xi\,(x/2)^{1/2}}^{\xi\,(x/2)^{1/2}} e^{-\tau^2}\; d\tau$$

Si x tiende a infinito, resulta:

$$I_2 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}\; d\tau$$

Pero esta integral no es sino la integral de Gauss, que según se vió en el apartado 1.3, es igual a la raiz cuadrada de π. Entonces:

$$I_2 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \sqrt{\pi}$$

En resumen:

$$\lim_{x\to\infty} \Gamma(x+1) = x^{x+1}\, e^{-x} \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \sqrt{\pi} = x^{x}\, e^{-x} \sqrt{2\,\pi\, x}$$

Si x es un número natural, n, esta ecuación conduce a la llamada *Fórmula de Stirling*, que permite hacer en forma directa, como hemos dicho, el cálculo aproximado del producto factorial de números grandes:

$$\Gamma(n+1) \to n^{n}\, e^{-n} \sqrt{2\,\pi\, n}$$

1.15 - Determinación de la fórmula de Stirling a partir de la fórmula asintótica de Wallis:

Como hemos dicho más arriba, es posible deducir la fórmula de Stirling a partir de la de Wallis (1.23). Comenzaremos por hallar la raíz cuadrada en ambos miembros de la misma:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (1.29)$$

Si recordamos que

$$(2n)! = (2n)!! \,.\, (2n-1)!!,$$

despejando obtenemos:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!}$$

También hemos visto que:

$$(2n)!! = 2^{n} \,.\, n!$$

y por lo tanto, reemplazando en la (1.29), hallamos sucesivamente:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^{2}}{(2n)! \,.\, \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \,.\, (n!)^{2}}{(2n)! \,.\, \sqrt{n}}$$

Finalmente, si multiplicamos ambos miembros por $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2\,\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \,.\, (n!)^{2} \sqrt{2}}{(2n)! \,.\, \sqrt{n}} \qquad (1.30)$$

Paralelamente, consideraremos la función:

$$f(x) = \frac{e^{x} \,.\, x!}{x^{x} \sqrt{x}} \qquad (1.31)$$

Si hacemos en ella

$$x = 2n$$

obtenemos lo siguiente:

$$f(x) = \frac{e^{x} \cdot x!}{x^{x} \sqrt{x}} = \frac{e^{2n} \cdot (2n)!}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}$$

Si tomamos límites para x tendiendo a infinito, n también tiende a infinito, y por lo tanto podemos escribir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \cdot x!}{x^{x} \sqrt{x}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{2n} \cdot (2n)!}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}} \qquad (1.32)$$

Vamos a recurrir ahora al arbitrio de cambiar el nombre de la variable n por x. Formalmente, nada nos impide hacerlo, siempre que tengamos bien en claro que tal modificación sólo es válida en el límite.

En efecto, es obvio que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} \cdot (2x)!}{(2x)^{2x} \sqrt{2x}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{2n} \cdot (2n)!}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}} \qquad (1.33)$$

Y entonces, como los segundos miembros de (1.32) y (1.33) son iguales, por carácter transitivo podemos escribir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \cdot x!}{x^{x} \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} \cdot (2x)!}{(2x)^{2x} \sqrt{2x}}$$

A partir de este razonamiento, podemos concluir asimismo que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{e^{x} \cdot x!}{x^{x} \sqrt{x}}}{\dfrac{e^{2x} \cdot (2x)!}{(2x)^{2x} \sqrt{2x}}} = 1$$

A continuación multiplicaremos ambos miembros por f (x), tal como fue definida en la (1.31):

$$f(x) = \frac{e^{x} \cdot x!}{x^{x} \sqrt{x}}$$

Con esto, obtendremos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\dfrac{e^{x} \, . \, x!}{x^{x} \, \sqrt{x}} \right)^{2}}{\dfrac{e^{2x} \, . \, (2x)!}{(2x)^{2x} \, \sqrt{2x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \, . \, x!}{x^{x} \, \sqrt{x}} \tag{1.34}$$

Ahora efectuaremos el cociente de fracciones que aparece en el primer miembro de la (1.34), y a continuación simplificamos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} \, (x!)^{2} \, (2x)^{2x} \, \sqrt{2x}}{x^{2x} . \, x \, . \, e^{2x} . \, (2x)!} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x!)^{2} \, 2^{2x} \, \sqrt{2}}{(2x)! \, \sqrt{x}} \tag{1.35}$$

Reemplazando en la (1.34), hallamos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x!)^{2} \, 2^{2x} \, \sqrt{2}}{(2x)! \, \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \, . \, x!}{x^{x} \, \sqrt{x}} \tag{1.36}$$

Al llegar aquí, podemos observar que el primer miembro de la (1.36) es idéntico, salvo por el nombre de la variable, al último de la (1.30):

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} . \, (n!)^{2} \, \sqrt{2}}{(2n)! \, . \sqrt{n}}$$

Esto nos permite escribir:

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{2x} . \, (x!)^{2} \, \sqrt{2}}{(2x)! \, . \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \, . \, x!}{x^{x} \, \sqrt{x}}$$

De la igualdad:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} \, . \, x!}{x^{x} \, \sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$$

despejando el factorial de x, se deduce que:

$$\lim_{x \to \infty} x! = \lim_{x \to \infty} x^{x} \, \sqrt{2\pi x} \, e^{-x}$$

Finalmente, si x es un número entero, al que llamaremos como es usual, n, nos reencontramos con la fórmula de Stirling: Para n suficientemente grande es

$$n! \cong n^{n} \, \sqrt{2\pi n} \, e^{-n}$$

1.16: Funciones factoriales de números complejos:

Para finalizar el estudio de las funciones factoriales, trataremos en este último apartado aquellas cuyo argumento es un número complejo.

En primer lugar, analizaremos la función Γ de un número complejo. Sea z = x + iy. En tal caso:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{\infty} t^{x+iy-1} e^{-t}\, dt$$

Recordemos la fórmula de la potencia de exponente complejo de un número a:

$$a^{\gamma} = e^{\gamma . \ln a}$$

Si aplicamos esta fórmula al integrando de la ecuación que representa la función Γ, y hacemos:

$$a = t \qquad y \qquad \gamma = iy,$$

tendremos:

$$t^{x+iy-1} e^{-t} = t^{x-1} . t^{iy} e^{-t} = t^{x-1} . e^{iy . \ln t} e^{-t}$$

y desarrollando la exponecial de exponente complejo en una suma de coseno y seno:

$$t^{x+iy-1} e^{-t} = t^{x-1} . e^{-t} [\cos(y . \ln t) + i . \operatorname{sen}(y . \ln t)]$$

Nos encontramos aquí frente a una integral impropia de tercera clase, pues por un lado el intervalo de integración es infinito, y por el otro también los límites de ambas partes, real e imaginaria, del integrando, son indefinidos, por ser infinito el módulo del logaritmo de t, tanto para $t \to 0$ como para $t \to \infty$. Recordemos que el límite de las funciones seno y coseno es oscilante entre 0 y 1 cuando el argumento tiende a infinito.

Por el contrario, es siempre posible definir funciones factoriales de un número complejo, de acuerdo con la definición que dimos para las mismas en el parágrafo 1.6.

Ejemplos de funciones factoriales de números complejos:

En general, no hay dificultad para imaginar y calcular funciones factoriales que involucran números complejos. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Sea la función:

$$2i(1+2i).(2+2i).(3+2i).(4+2i) = [n+2i]_1^4$$

Trataremos de calcular esta función:

$$2i(1+2i) = -4+2i$$

$$(- 4 + 2 i) . (2 + 2 i) = - 8 - 4 + i (- 8 + 4) = - 12 - 4 i$$

$$(- 12 - 4 i) . (3 + 2 i) = - 36 + 8 + i (- 24 - 12) = - 28 - 36 i$$

$$(- 28 - 36 i) . (4 + 2 i) = - 112 + 72 + i (- 56 - 144) = - 40 - 200 i$$

Es decir que la función factorial dada existe, y es posible por tanto calcular su valor, como hemos visto.

Ejemplo 2:

Sea la función factorial

$$[x]_k^m = [8 + 2 i]_{1 + i}$$

Se trata de hallar el valor de m para que el último término sea un número real.

Empezaremos por recordar la definición de función factorial:

Se define como función factorial de x, de grado m y diferencia k al producto:

$$x . (x - k) . (x - 2k) . (x - 3k) \ . . . \ (x - m + k)$$

En nuestro ejemplo, los valores respectivos son:

$$x = 8 + 2 i$$

$$k = 1 + i$$

Por lo tanto, la función puede representarse por medio del producto:

$$[8 + 2 i]_{1 + i} = (8 + 2 i) . (7 + i) . 6$$

De acuerdo con este resultado, es

$$x - m + k = 6$$

Y por tanto, despejando

$$m = x + k - 6 = 8 + 2 i + 1 + i - 6 = 9 + 3i - 6 = 3 + 3 i$$

Que es el resultado buscado.

1.17 - Algunas cuestiones relacionadas con el Producto de los términos de una sucesión numérica.

Varias de las funciones que hemos tratado en el presente Capítulo pertenecen a diferentes variantes de una misma categoría:

- Producto de todos los términos de una sucesión numérica,
- Producto de todos los términos de una sucesión numérica truncada, o
- Producto de determinados términos o secuencias de términos de una sucesión numérica.

Por lo tanto, tales funciones están genéricamente definidas por la fórmula siguiente, también conocida como *Productoria*, por su semejanza formal con una sumatoria:

$$f(n) = \prod_{n=M}^{N} a_n = a_M \,.\, a_{M+1} \,.\, a_{M+2} \,.\, \ldots \,.\, a_{N-2} \,.\, a_{N-1} \,.\, a_N$$

En esta fórmula, a puede ser un número cualquiera, en el más amplio sentido del término, n es un número entero, que sigue una cierta secuencia, y por su parte, M y N pueden tomar cualquier valor entero, positivo o negativo, pero aceptaremos que siempre

$$M < N$$

Nos interesan en particular los productos de términos de sucesiones numéricas que detallaremos a continuación:

- Primer caso: Si $a_n = n$ y $M = 1$, estamos en presencia del factorial ordinario del número N. Este es el caso más sencillo:

  $$a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_n \,.\, \ldots \,.\, a_N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \ldots N = N!$$

- Segundo caso: Si $a_n = k\,n$, la función corresponde al factorial de orden k del número N:

Ejemplos:

$$k = 2$$

$$\therefore \quad N \,.\, (N-2) \,.\, (N-4) \,.\, (N-6) \,.\, \ldots \,.\, 4 \,.\, 2 = N\,!!$$

$$k = 3$$

$$\therefore \quad N \,.\, (N-3) \,.\, (N-6) \,.\, (N-9) \,.\, \ldots \,.\, 6 \,.\, 3 = N\,!!!$$

Como hemos visto oportunamente, en este caso puede ser necesario efectuar consideraciones adicionales para que el producto quede perfectamente definido.

Ejemplos:

$$7\,!! = 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1$$

Pero

$$8\,!! = 8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2$$

También:

$$16\,!!! \; = \; 16 \,.\, 13 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 1$$

Pero

$$15\,!!! \; = \; 15 \,.\, 12 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 3$$

ó

$$14\,!!! \; = \; 14 \,.\, 11 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 2$$

Los ejemplos muestran que puede ser necesario definir el valor de M, individualmente, para cada situación particular.

- Tercer caso: La función Gamma, $\Gamma(\alpha)$: Al estudiar esta función hemos visto que la misma puede ser formulada como un producto de funciones numéricas, o verdaderos números: α, α-1, α-2, α-3, . . . , $\Gamma(\alpha\text{-}k)$, tales que los argumentos de dos sucesivas cualesquiera difieren siempre en la unidad.

Tuvimos también oportunidad de ver que, cuando α es un número entero positivo, n, existe una relación directa entre la función Gamma y el factorial ordinario de n:

$$\Gamma(n + 1) \; = \; n!$$

Pero por otro lado sabemos también que la función Γ trasciende ampliamente de los límites de los números naturales. En efecto, es posible conocer la función (Su valor numérico), para practicamente cualquier número real α, con unas pocas excepciones, como son los números enteros negativos y el cero
En todos los demás casos, se verifica que la función es igual al producto de una sucesión de números:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\;...\;\Gamma(\alpha - k)$$

El valor de la función puede ser conocido para cualquier valor de a, siempre que se conozca *al menos uno* de los términos de la sucesión, por ejemplo, $\Gamma(\alpha - k)$. Este conocimiento implica que en general podemos, a partir de él, determinar el valor de cualquier término, anterior o posterior a $\Gamma(\alpha - k)$. En este Capítulo hemos visto en detalle varias aplicaciones y propiedades de la función $\Gamma(\alpha)$.

- Por fin, tenemos las *funciones factoriales*

$$[\,x\,]_k^m \;=\; x \,.\, (x - k) \,.\, (x - 2k) \,.\, (x - 3k)\;...\;(x - m + k)$$

que admiten una gran variedad de formas, según los valores que asignemos a x, m y k, o también, en ciertos casos en que la definición de estos tres parámetros resulta ambigua, en función del último número que atribuímos a la sucesión.

Para terminar con este vistazo sobre los productos de los términos de una sucesión, veremos algún ejemplo que podría ser considerado como una verdadera paradoja matemática.

En efecto, en el apartado 1.6 demostramos que

$$\left(\frac{n}{2}\right)! = \frac{n\,!!}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Por otra parte, si hacemos

$$\alpha = \frac{n}{2}$$

como

$$\Gamma\,(\,\alpha + 1\,) = \alpha\,!$$

reemplazando el valor de α, deberá ser:

$$\left(\frac{n}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

De donde surgiría que:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n\,!!}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Trtaremos de verificar si esta ecuación es verdadera. Probaremos inicialmente con n entero, par. Por ejemplo, n = 8. Entonces:

$$\left(\frac{8}{2}\right)! = \Gamma\,(\,5\,) = 4\,! = 24$$

Por su parte,

$$\frac{8\,!!}{2^4} = \frac{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}{16} = 24$$

Comprobamos que, para n par, la igualdad es válida. Veamos qué ocurre si n es un número entero impar. Por ejemplo, n = 7.

En tal caso

$$\left(\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\,(\,4{,}5\,) = 3{,}5\,.\,2{,}5\,.\,1{,}5\,.\,0{,}5\,.\,\Gamma\,(\,0{,}5) =$$

$$= 3{,}5\,.\,2{,}5\,.\,1{,}5\,.\,0{,}5\,.\,\sqrt{\pi} = 11{,}632$$

Por su parte

$$\frac{7\,!!}{2^{3{,}5}} = \frac{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{11{,}3137} = 9{,}281$$

La contradicción se debe a que estamos suponiendo que existe el factorial ordinario de un número fraccionario, en este caso, 3,5, cuando en realidad tratándose de números no enteros, sólo tiene sentido pensar en la función gamma, o en determinadas funciones factoriales.

1.18 - Problemas.

1.18.1 - Calcular la función Γ de los números 0,5 a 5, incrementando cada vez el anterior en 0,5.

Solución:

$\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi} = 1{,}7724$; $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(1{,}5) = 0{,}5 \cdot \Gamma(0{,}5) = 0{,}8862$;

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$; $\Gamma(2{,}5) = 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) = 1{,}3293$; etc.

1.18.2 - Calcular la función Γ de los números siguientes:

a) $\Gamma(-0{,}5) = -3{,}5449$ $\Gamma(-1{,}5) = 2{,}3633$

b) $\Gamma(-2{,}5)$ $\Gamma(-3{,}5)$ $\Gamma(-4{,}5)$

1.18.3 - Calcular las funciones factoriales siguientes:

a) $[10]_2^8 = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1920$

b) $[11]_2^4 = 99$ $[15]_3^9 = 1620$ $[15]_1^5 = 360.360$

c) $[16]_5^{10}$ $[20]_3^9$ $[7]_1^7$ $[6]_1^2$

1.18.4 - En las tablas de funciones Γ encontramos los siguientes valores:

Γ (1,1)	**Γ (1,2)**	**Γ (1,3)**	**Γ (1,4)**	**Γ (1,5)**	**Γ (1,6)**	**Γ (1,7)**	**Γ (1,8)**	**Γ (1,9)**	**Γ (2)**
0,9514	0,9182	0,8975	0,8873	0,8862	0,8935	0,9086	0,9314	0,9618	1

Se pide calcular, utilizando la Fórmula de los Complementos, las funciones factoriales siguientes:

a) $\Gamma(0{,}9)$

Solución: Por la fórmula de los complementos es: $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi}$

Por otra parte, $\Gamma(0{,}1) = \dfrac{\Gamma(1{,}1)}{0{,}1} = \dfrac{0{,}9514}{0{,}1} = 9{,}514$

Combinando ambas fórmulas, podemos hacer

$$\Gamma(0{,}9) = \frac{\pi}{\Gamma(0{,}1)\,.\,\mathrm{sen}\,0{,}9\,\pi} = \frac{\pi}{9{,}514\,.\,0{,}309} = 1{,}0686$$

b) $\Gamma(0{,}1)$ $\Gamma(0{,}4)$ $\Gamma(0{,}5)$ $\Gamma(0{,}8)$

1.18.5 - Calcular el valor de las funciones Beta siguientes:

a) $$B(3, 5) = \frac{\Gamma(3)\,.\,\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \frac{2!\,.\,4!}{7!} = \frac{2\,.\,24}{5040} = 0{,}00952$$

b) $B(1, 2)$ $B(5, 0{,}5)$ $B(4, 3)$ $B(1{,}4, 0{,}5)$

1.18.6 - Calcular, aplicando la fórmula de la Integral de Wallis,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t\, dt = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

las integrales siguientes:

a) $$\int_0^{\pi/2} \cos^5 t\, dt = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(0{,}5)\,.\,\Gamma(3)}{\Gamma(3{,}5)}$$

$$= \frac{1{,}7724\,.\,2}{2\,.\,3{,}3233} = 0{,}53333$$

b) Verificar el resultado anterior a través de la Fórmula de Recurrencia

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 t\, dt = \frac{4!!}{5\,.\,3!!} = 0{,}5333$$

c) $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(0{,}5)\,.\,\Gamma(1{,}5)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1{,}7745\,.\,0{,}8862}{1\quad.\,1} = 0{,}786$$

d) Verificar el resultado anterior, calculando la integral en forma directa:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \ dt = \left. \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$$

e) Calcular las integrales

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 t \ dt \qquad I_8 = \int_0^{\pi/2} \cos^8 t \ dt$$

R: $I_7 = 0{,}4571$ $\quad I_8 = 0{,}4295$

1.18.7 - Calcular los factoriales siguientes:

a) 10!!

Solución: Para resolver este y los problemas siguientes resulta práctico recurrir a las fórmulas:

$(2n)!! = 2^n . n!$ o bien $(2n)! = (2n)!! . (2n-1)!!$

$\therefore$ $10!! = 2^5 . 5! = 32 . 120 = 3840$

b) $16! = 16!! . 15!! = 10.321.920 \times 2.027.025 = 20.922.789.888.000$

c) 7!! 8!! 12!! 15!!

1.18.8 - Hallar el valor de m para que el último factor de las funciones siguientes sea real:

a) $[15 + 3i]^m_{3+i} = (15 + 3i) . (12 + 2i) . (9 + i) . 6$

$\therefore$ $x - m + k = 6$

Como:

$x = 15 + 3i$ y $k = 3 + i$,

$\therefore$ $m = x + k - 6 = 15 + 3i + 3 + i - 6 = 12 + 4i$

b) $[17 - 4i]^m_{2-i}$

R: $m = 10 - 5i$

c) $[-20 + 5i]^m_{-5+i}$

R: $m = -30 + 6i$

1.18.9 - Calcular el último término de las funciones factoriales:

a) $[\,17 - 4i\,]_{2-i}^{8-4i}$

Solución:

$x - m + k = 17 - 4i - 8 + 4i + 2 - i = 11 - i$

b) $[\,15 - 6i\,]_{1-2i}^{2-4i}$

Solución:

$x - m + k = 15 - 6i - 2 + 4i + 1 - 2i = 14 - 4i$

Esta productoria se reduce a solamente dos factores. En efecto:

$$[\,15 - 6i\,]_{1-2i}^{2-4i} = (15 - 6i)\,.\,(14 - 4i)$$

c) Expresar la ecuación anterior como una productoria (Serie de factores):

Solución:

$$[\,x\,]_k^m = \prod_{n=0}^{1+m/k} x - nk = (x)\,.\,(x-k)\,.\,(x-2k)\ \ldots\ [\,x - (1 + m/k)\,k\,]$$

¿Qué ocurrirá si cambiamos el signo de m? Veamos:

$$[\,15 - 6i\,]_{1-2i}^{-2+4i}$$

En este caso, aplicando la fórmula correspondiente, el último término es:

$x - m + k = 15 - 6i + 2 - 4i + 1 - 2i = 18 - 12i$

Y la productoria:

$$[\,15 - 6i\,]_{1-2i}^{-2+4i} = (15 - 6i)\,.\,(16 - 8i)\,.\,(17 - 10i)\,.\,(18 - 12i) = \prod_{n=0}^{n=1-m/k} x + nk$$

Esta situación se produce cuando el signo de m es opuesto al de k.

1.18.9 - Calcular las diferencias siguientes:

a) $\Delta\,[\,4\,]_1^2 = [\,5\,]_1^2 - [\,4\,]_1^2 = 5\,.\,4 - 4\,.\,3 = 8$

O también:

$$\Delta\,[\,4\,]_1^2 = 2\,.\,[\,4\,]_1^1 = 8$$

b) $\Delta [\,9\,]_1^6 \;=\; 6\,.\,[\,9\,]_1^5 \;=\; 90.720$

O bién:

$[\,10\,]_1^6 \;-\; [\,9\,]_1^6 \;=\; 151.200 - 60.480 \;=\; 90.720$

c) $\Delta [\,12\,]_1^4$

Aplicaciones Matlab:

- *Cálculo de factoriales.*

```
» % Cálculo de factoriales:
»
» fact 4 = prod (1 : 4)
fact 4 =     24
»
» % La función "gamma (n + 1)", con n entero, es igual al factorial de n:
»
» gamma (5)
ans =    24

»
» fact10 = prod (1: 1: 10)
fact10 =     3628800
»
» gamma (11)
ans =     3628800
```

- *Fórmula de Stirling: Factorial de grandes números. Error relativo al emplear la fórmula.*

```
» Cálculo del factorial de 100 utilizando la fórmula de Stirling:
»
» fact100 = (100^100*exp(-100)*(2*pi*100)^0.5)
fact100 =  9.3248e+157
» Stirling100 = fact100
Stirling100 =  9.3248e+157
»
» gamma (101)
ans =  9.3326e+157
»
```

```
» error = gamma (101) - Stirling100
error =  7.7739e+154
»
» % Error relativo:
» Erelat = error/gamma(101)
Erelat =  8.3298e - 004
»
» % El error relativo es inferior a 10^(-3)
```

- *Función gamma de números fraccionarios y de números enteros negativos. Ejemplos:*

```
» gamma (0.1)
ans =    9.5135
»
» gamma (0.4)
ans =    2.2182
»
» gamma (0.5)
ans =    1.7725
»
» gamma (0.9)
ans =    1.0686
»
» gamma (1.235)
ans =    0.9096
»
» gamma (5.3)
ans =   38.0780
»
» gamma (2^0.5)
ans =    0.8866
»
» gamma (-2^0.5)
ans =    2.5995
»
» gamma (-1/7)
ans =   -7.7404
»
» gamma (-3)
Warning: Divide by zero.
ans =   Inf
```

- *Función GAMMALN: Calcula el logaritmo natural de la función Gamma. Ejemplos:*

```
» clear all
» gammaln (2)
ans =     0
» gammaln(3)
ans =    0.6931
» gammaln(4)
ans =    1.7918
» gammaln(0.5)
ans =    0.5724
```

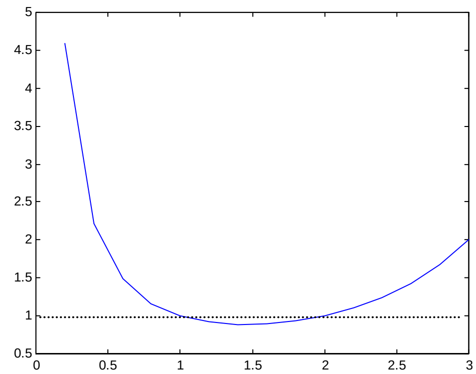
- *Construcción de tablas de la función Gamma.*

```
» clear all
»  n = [0.1 : .1 : 1; 1.1 : .1 : 2; 2.1 : .1 : 3]
n =
  Columns 1 through 7
    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000
    1.1000    1.2000    1.3000    1.4000    1.5000    1.6000    1.7000
    2.1000    2.2000    2.3000    2.4000    2.5000    2.6000    2.7000
Columns 8 through 10
    0.8000    0.9000    1.0000
    1.8000    1.9000    2.0000
    2.8000    2.9000    3.0000
»
»
» gamma (n)
ans =
  Columns 1 through 7
    9.5135    4.5908    2.9916    2.2182    1.7725    1.4892    1.2981
    0.9514    0.9182    0.8975    0.8873    0.8862    0.8935    0.9086
    1.0465    1.1018    1.1667    1.2422    1.3293    1.4296    1.5447
  Columns 8 through 10
    1.1642    1.0686    1.0000
    0.9314    0.9618    1.0000
    1.6765    1.8274    2.0000
```

- *Gráfica de la función Gamma:*

```
» n = [0.2 : .2: 3]
```

```
n =
  Columns 1 through 7
    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000    1.2000    1.4000
  Columns 8 through 14
    1.6000    1.8000    2.0000    2.2000    2.4000    2.6000    2.8000
  Column 15
    3.0000
»
» plot (gamma (n))
```



- *Integral de Gauss:*

```
» % Cálculo de la Integral de Gauss:
» syms   f   u
» f = int (exp(-u^2), u, 0, inf)
f = 1/2*pi^(1/2)
```

- *Cálculo de factoriales dobles:*

```
» % Calcular el factorial f = 9!!
» syms n
» n = [9 : -2 : 1]
n =     9     7     5     3     1
» f = prod (n)
f =   945
```

- *Cálculo de la función BETA. Ejemplos:*

```
» f = beta (3,5)
f =     0.0095
»
» g = beta (1,2)
g =     0.5000
»
» h = beta (5,0.5)
h =     0.8127
»
```

```
» k = beta (1.4, 0.5)
k =    1.6352
```

- *Integral de Wallis (Integral de cos^m (t), entre 0 y pi/2:*

```
» syms t  f
» % Calcular la integral de cos^5 (t) entre 0 y pi/2:
» f = int (((cos(t))^5),t,0,pi/2)
f =8/15
» f = 8/15
f =    0.5333
»
» %Verificaremos el resultado por medio de la función beta:
» clear f
» f = .5*beta (.5, 3)
f =    0.5333
```

- *Funciones factoriales:*

```
» % Resolver el ejemplo I del punto 1.16: Función factorial de números complejos.
»
» x = [0  1  2  3  4]
» y = x+2*i
y =
  Columns 1 through 4
        0 + 2.0000i   1.0000 + 2.0000i   2.0000 + 2.0000i   3.0000 + 2.0000i
  Column 5
   4.0000 + 2.0000i
» funfac = y(1,1)*y(1,2)*y(1,3)*y(1,4)*y(1,5)
funfac =  - 4.0000e+001 - 2.0000e+002i
» % funfac = - 40 - 200 i
»
» % Segunda forma:
» clear  funfac
» funfac = prod (y)
funfac =   - 4.0000e+001 - 2.0000e+002i


» % Calcular las funciones factoriales siguientes:
» x = 10; m = 8; k = 2;
» a = [ x : -k : x-m+k];
» A = prod(a)
A =       1920
```

```
»
» clear all
» x = 11; m = 4; k = 2;
» b = [ x : -k : x-m+k];
» B = prod (b)
B =    99
»
» clear all
» x = 15; m = 9;  k = 3;
» c = [ x : -k : x-m+k];
» C = prod (c)
C =       1620
»
» clear all
» x = 15; m = 5; k = 1;
» d = [ x : -k : x-m+k];
» D = prod (d)
D =     360360


» clear all
» x = 17; m = 7; k = 1;
» e = [ x : -k : x-m+k];
» E = prod (e)
E =    98017920
```

- *Verificar la igualdad: 16! = 15!! . 16!!:*

```
» fact16 = gamma (17)
fact16 =  2.0923e+013
»
» factdoble15 = [15 : -2 : 1];
» x = prod (factdoble15)
x =     2027025
»
» factdoble16 = [16 : -2 : 1];
» y = prod (factdoble16)
y =    10321920
»
» x*y
ans =  2.0923e+013
```

- *Verificar los problemas del punto 1.18.8: Hallar m para que el último término sea real:*

```
» x = 15+3i; m = 12+4i; k = 3+i;
» x-k
ans =   12.0000 + 2.0000i
» x-2*k
ans =    9.0000 + 1.0000i
» x-3*k
ans =     6
»
»
»
» % Problema b:
» x = 17-4i; m = 10-5i; k = 2-i;
» x-k
ans =   15.0000 - 3.0000i
» x-2*k
ans =   13.0000 - 2.0000i
» x-3*k
ans =   11.0000 - 1.0000i
» x-4*k
ans =     9
```